SOMMAIRE


- CHAPITRE 3 : TENSEUR CARTESIENS D'ORDRE 2 pages 191

3-1 Rappel sur les changements de base 192
3-2 Convention de l'indice muet ou convention d'Einstein 195
3-3 Vecteur polaire ou tenseur du 1er ordre 195
3-4 Remarque fondamentale 197
3-5 Première définition d'un tenseur du second ordre 197
3-6 Opérations sur les tenseurs 202
3-7 Deuxième définition d'un tenseur du second ordre 210
3-8 Tenseurs particuliers 213
3-9 Etude des tenseurs du 2e ordre symétriques dans $R^3$ 213
3-10 Etude des tenseurs du 2e ordre antisymétriques dans $R^3$ 216
3-11 Méthode d'étude d'un tenseur du 2e ordre quelconque 217

- CHAPITRE 4 : GEOMETRIE DES MASSES 220

4-1 Champ de masse spécifique d'un système matériel 221
4-2 Grandeurs associées au champ scalaire 221
4-3 Grandeur scalaire associée au champ de masse spécifique d'un système. Masse d'un système 222
4-4 Grandeur vectorielle associée au champ de masse spécifique : centre d'inertie d'un système 226
4-5 Grandeur tensorielle associée au champ de masse spécifique. Tenseur d'inertie. 234
4-5-1 Tenseur d'inertie $\overline{\overline{\Pi}}_o$ 234
4-5-2 Le tenseur $\overline{\overline{\Sigma}}$ 236
4-5-3 Le tenseur $\overline{\overline{I}}$. Définition. Etude des éléments. 237
4-5-4 Etude du tenseur $\overline{\overline{I}}$. Propriétés. Méthode de calcul. 239
4-5-5 Détermination expérimentale des moments d'inertie. 264

- CHAPITRE 5 : CINETIQUE 271

5-1 Torseur cinétique 272
5-1-1 Définition concernant l'élément de masse entourant le point P 272
5-1-2 Torseur cinétique (abus de langage) 272
5-1-3 Exemple 272
5-1-4 Théorème du centre d'inertie concernant la somme cinétique 274
5-1-5 Théorème concernant le moment cinétique 274
5-2 Torseur dynamique 287
5-2-1 Définition concernant l'élément de matière entourant le point P 287
5-2-2 Torseur des quantités d'accélération ou torseur dynamique 287


© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

5-3 Relation entre le torseur cinétique et le torseur dynamique. Calcul du torseur dynamique p. 288
5-3-1 Relation entre $\vec{\Sigma}^g$ et $\vec{\sigma}^g$. Calcul de la somme dynamique. 288
5-3-2 Relation entre le moment cinétique et le moment dynamique. Calcul du moment dynamique. 289

5-4 Energie cinétique 295
5-4-1 Définition concernant l'énergie cinétique 295
5-4-2 Théorème Koenig 295
5-4-3 Energie cinétique d'un solide ayant un point fixe $O_s$ dans $R_g$. 296
5-4-4 Théorème de Koenig pour le solide 298
5-4-5 Exemple 298

---

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

# INTRODUCTION

Dans ce fascicule, nous avons réunis les chapitres 3, 4 et 5 du cours de Mécanique Générale.

Le chapitre 3 concerne la notion de tenseurs cartésiens du second ordre dans un espace à trois dimensions. Le caractère physique de cette notion ainsi que la concision de son formalisme, nous ont conduit à la présenter dans un chapitre à part.

Les notions qui interviennent dans le chapitre 4 sont purement géométriques. Il est montré que le comportement dynamique de la matière peut se caractériser par trois grandeurs tensorielles d'ordre zéro, un et deux respectivement pour la masse, le centre d'inertie et les moments d'inerties. L'étude détaillée de ces trois grandeurs est faite dans ce chapitre intitulé "géométrie des masses".

Le chapitre 5 de cinétique n'aurait pas lieu d'exister en tant que tel. Cependant, les notions de torseur cinétique, torseur dynamique et de l'énergie cinétique ainsi présentées permettent d'exposer de façon claire et concise, les théorèmes généraux de la mécanique qui seront étudiés au chapitre 6.

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

# CHAPITRE 5

# CINETIQUE

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Le repère de référence est $R_g$, le système est désigné par (S). L'indice "g" n'a aucune signification particulière dans ce chapitre qui associe la cinématique et la géométrie des masses. Il est simplement l'indice employé pour caractériser les repères galiléens que nous définirons en dynamique.

## 5.1 TORSEUR CINETIQUE

### 5.1.1 Définition concernant l'élément de masse dm entourant le point P

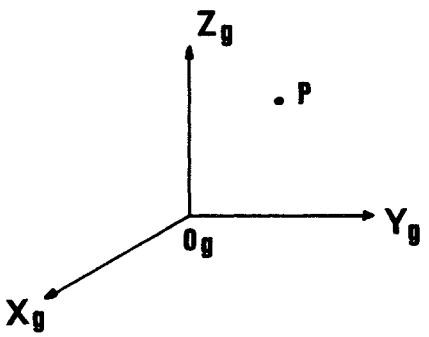



Fig 5.1

- *quantité de mouvement élémentaire*

$$\boxed{d\,\vec{\sigma}^g = \vec{V}^g_{(P)}\,dm}$$

- *moment cinétique élémentaire en un point C*

$$\boxed{d\,\vec{\mu}^g_{(C)} = \vec{CP} \wedge \vec{V}^g_{(P)}\,dm}$$

### 5.1.2 Torseur cinétique (abus de langage)

A l'ensemble des vecteurs $\vec{V}^g_{(P)}dm$ on peut faire correspondre le torseur cinétique dont les éléments de réduction sont :

a) *la somme géométrique cinétique ou quantité de mouvement totale*

$$\boxed{\vec{\sigma}^g = \int_{P\epsilon S} \vec{V}^g dm}$$

b) *moment cinétique du système en un point C quelconque*

$$\boxed{\vec{\mu}^g_{(C)} = \int_{P\epsilon S} \vec{CP} \wedge \vec{V}^g dm}$$

### 5.1.3 Exemple :

Calculer la somme et le moment cinétique au point O pour la barre homogène de masse m et de longueur l.

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

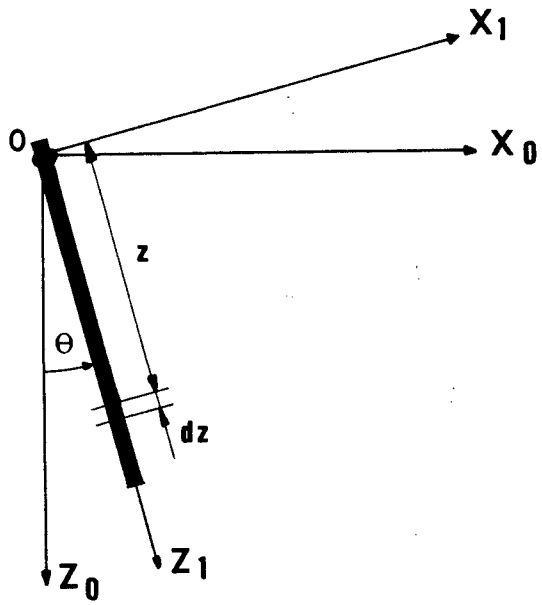



Fig. 5.2

a) $\vec{\sigma^o} = \int_{P\varepsilon S} \overrightarrow{V^o}_{(P)}\, dm$

$\overrightarrow{V^o}_{(P)} = z\,\theta'\,\vec{X_1}$

$dm = \frac{m}{l}\,dz$

$\vec{\sigma^o} = (\frac{m}{l}\,\theta' \int_o^l z\,dz).\,\vec{X_1}$

$\vec{\sigma^o} = \frac{m}{l}\,\theta'\,\frac{l^2}{2}\,\vec{X_1}$

$\vec{\sigma^o} = m\,\frac{l}{2}\,\theta'\,\vec{X_1}$

ce que l'on peut écrire aussi

$\vec{\sigma^o} = m\,\overrightarrow{V^o}_{(G)}$

*Nous verrons ultérieurement que ce résultat est général.*

b) $\overrightarrow{\mu^o}_{(o)} = \int_{P\varepsilon S} \vec{CP} \wedge \vec{V^g}_{(P)}\, dm$

$\vec{CP} \wedge \vec{V^g}_{(P)} = z\,\vec{Z_1} \wedge z\,\theta'\,\vec{X_1} = z^2\,\theta'\,\vec{Y_1}$

$\overrightarrow{\mu^o}_{(o)} = (\frac{m}{l}\,\theta' \int_o^l z^2\,dz)\,\vec{Y_1}$

$\overrightarrow{\mu^o}_{(o)} = \frac{m}{l}\,\theta' \left|\frac{z^3}{z}\right|_o^l .\,\vec{Y_1}$

$\overrightarrow{\mu^o}_{(o)} = \frac{ml^2}{3}\,\theta'\,\vec{Y_1}$

ce qui peut s'écrire aussi

$\overrightarrow{\mu^o}_{(o)} = \bar{\bar{I}}_o .\,\overrightarrow{\Omega_1}^o$

*Nous verrons là encore que le résultat est général*

L'utilisation des intégrales de définition permet donc le calcul du torseur cinétique. Cependant en pratique nous utiliserons des formules générales que nous allons établir.

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

### 5.1.4 Théorème du centre d'inertie (concernant la somme cinétique $\vec{\sigma}^g$)

a) *Théorème : la quantité de mouvement totale $\sigma^g$ est égale à la quantité de mouvement du centre d'inertie affecté de la masse totale*

$$\boxed{\vec{\sigma}^g = m \cdot \vec{V}^g_{(G)}}$$

b) *Démonstration*

$$\int_{P \in S} \vec{V}^g_{(P)} \, dm = \int_{P \in S} \frac{d^g \overrightarrow{OP}}{dt} \, dm$$

$$= \frac{d^g}{dt} \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} \, dm$$

Si G est le barycentre des points P de poids m on a

$$\vec{\sigma}^g = \frac{d^g}{dt} m \, \overrightarrow{OG}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}^g = m \, \vec{V}^g_{(G)}}$$

### 5.1.5 Théorèmes concernant le moment cinétique

a) *Changement d'origine pour le calcul du moment cinétique*

$$\boxed{\vec{\mu}^g_{(C)} = \vec{\mu}^g_{(D)} + \overrightarrow{CD} \wedge \vec{\sigma}^g}$$

C'est un théorème de la théorie des torseurs.

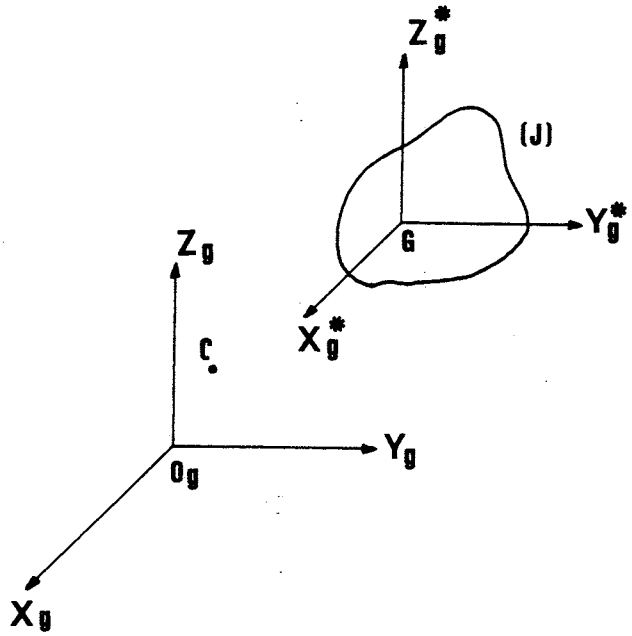
b) *Théorème de Koënig pour le moment cinétique*

Considérons un repère $R^*_g$, d'origine G et dont les axes sont

$$\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{X^*_g} = \overrightarrow{X_g} \\ \overrightarrow{Y^*_g} = \overrightarrow{Y_g} \\ \overrightarrow{Z^*_g} = \overrightarrow{Z_g} \end{array} \right.$$

Le mouvement du système dans le repère $R^*_g$ est dit "*mouvement du système autour du centre d'inertie*".

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.




$$\overrightarrow{\mu^g}_{(C)} = \int_{P\epsilon S} \overrightarrow{CP} \wedge \overrightarrow{V^g}_{(P)}\, dm$$

$$\overrightarrow{V^g}_{(P)} = V^{g*}_{(P)} + \overrightarrow{V^g_{g*}}\,(P)$$

Fig 5.3

$$\overrightarrow{\mu^g}_{(C)} = \int_{P\epsilon S} \overrightarrow{CP} \wedge \overrightarrow{V^{g*}}_{(P)}\, dm = \int_{P\epsilon S} \overrightarrow{CP} \wedge \overrightarrow{V^g}_{g*}(P)\, dm$$

$$\overrightarrow{\mu^g}_{(C)} = \overrightarrow{\mu^{g*}}_{(C)} + \left( \int_{P\epsilon S} \overrightarrow{CP}\, dm \right) \wedge \overrightarrow{V^g}\,(G)$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mu^g}_{(C)} = \overrightarrow{\mu^{g*}}_{(C)} + m\, \overrightarrow{CG} \wedge \overrightarrow{V^g}_{(G)}}$$

On peut donc énoncer le théorème de Koënig :

*Le moment cinétique d'un système dans le repère (Rg) est égal au moment cinétique dans le mouvement autour du centre d'inertie augmenté du moment cinétique du centre d'inertie affecté de la masse totale.*

On peut mettre en évidence le rôle du repère de Koënig de la façon suivante. Appliquons le théorème fondamental de la théorie des torseurs :

$$\overrightarrow{\mu^{g*}}_{(C)} = \overrightarrow{\mu^g}_{(G)} + \overrightarrow{CG} \wedge m\, \overrightarrow{V^{g*}}_{(G)}$$

Mais $\overrightarrow{V^{g*}}_{(G)} = 0$ G étant l'origine de $(Rg)^*$

Par suite $\overrightarrow{\mu^{g*}}_{(C)} = \overrightarrow{\mu^{g*}}_{(G)}$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Par suite dans le repère de Koënig le moment est le même partout : le torseur est spécial : c'est un couple.

La formule du théorème de Koënig peut donc s'écrire :

$$\boxed{\vec{\mu}^{g}_{(C)} = \vec{\mu}^{g*}_{(G)} + \vec{CG} \wedge m\, \vec{V}^{g}_{(G)}}$$

et c'est sous cette forme que nous l'utiliserons ultérieurement.

c) *Moment cinétique d'un solide en un point du solide*

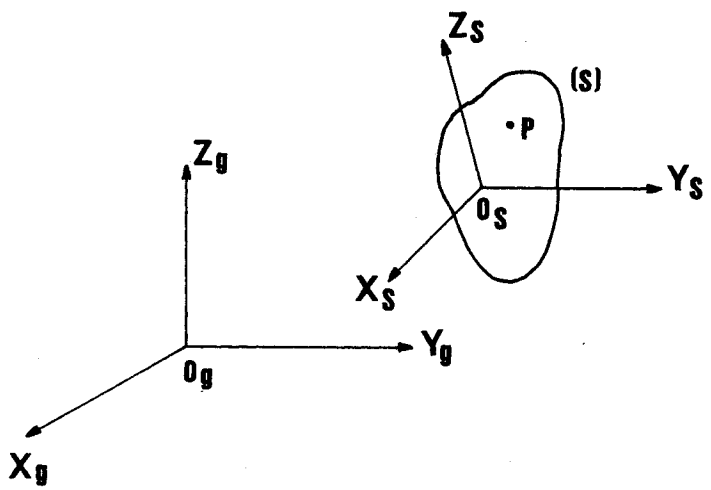



Fig 5.4

1/ Formule générale

Calculons le moment cinétique en $O_s$ lié au solide ; au solide (S) lions le repère $(O_s, \vec{X_s}, \vec{Y_s}, \vec{Z_s})$

D'après la formule fondamentale de la cinématique du solide

$$\vec{V}^{g}_{(P)} = \vec{V}^{g}_{(O_s)} + \vec{\Omega}^{g}_{s} \wedge \vec{O_sP}$$

$$\vec{\mu}^{g}_{(O_s)} = \int_{P\in S} \vec{O_sP} \wedge \vec{V}^{g}_{(O_s)}\, dm + \int_{P\in S} \vec{O_sP} \wedge (\vec{\Omega}^{g}_{s} \wedge \vec{O_sP})\, dm$$

$$\vec{\mu}^{g}_{(O_s)} = \vec{J_1} + \vec{J_2}$$

$$\vec{J_1} = \int_{P\in S} \vec{O_sP}\, dm \wedge \vec{V}^{g}_{(O_s)} \qquad \vec{J_1} = \vec{O_sG} \wedge m\, \vec{V}^{g}_{(O_s)}$$

$$\vec{J_2} = \int_{P\in S} \vec{O_sP} \wedge (\vec{\Omega}^{g}_{s} \wedge \vec{O_sP})\, dm$$

Cette dernière intégrale se calcule aussi facilement. Posons

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$$\overrightarrow{O_sP} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{R_s} \qquad \overrightarrow{\Omega_s^g} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_{R_s}$$

$$\overrightarrow{\Omega_s^g} \wedge \overrightarrow{O_sP} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_{R_s} \wedge \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{R_s} = \begin{bmatrix} qz - ry \\ rx - pz \\ py - qx \end{bmatrix}_{R_s}$$

$$\overline{O_sP} \wedge (\overline{\Omega_s^g} \quad \overline{O_sP}) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} qz - ry \\ rx - pz \\ py - qx \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{O_sP} \wedge (\overrightarrow{\Omega_s^g} \wedge \overrightarrow{O_sP}) = \begin{bmatrix} y(py - qx) - z(rx - pz) \\ z(qz - ry) - x(py - qx) \\ x(rx - pz) - y(qz - ry) \end{bmatrix}_{R_s}$$

$$= \begin{bmatrix} p(y^2 + z^2) - qxy - ryx \\ q(z^2 + x^2) - ryz - pxy \\ r(x^2 + y^2) - pzx - qyz \end{bmatrix}_{R_s}$$

$$\overrightarrow{J_2} = \begin{bmatrix} p \int_{P\varepsilon S} (y^2 + z^2)\, dm - q \int_{P\varepsilon S} xydm - r \int_{P\varepsilon S} zxdm \\ - p \int_{P\varepsilon S} xydm + q \int_{P\varepsilon S} (z^2 + x^2)\, dm - r \int_{P\varepsilon S} yzdm \\ - p \int_{P\varepsilon S} zxdm - q \int_{P\varepsilon S} yzdm + r \int_{P\varepsilon S} (x^2 + y^2)\, dm \end{bmatrix}_{R_s}$$

Soit encore

$$\overrightarrow{J_2} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

on reconnait là le produit contracté du tenseur d'inertie par le vecteur rotation :

$$\overrightarrow{J_2} = \overline{\overline{I}}_{O_s} \cdot \overrightarrow{\Omega}^g_s$$

D'où finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{\mu}^g_{(O_s)} = \overrightarrow{O_sG} \wedge m \overrightarrow{V}^g_{(O_s)} + \overline{\overline{I}}_{O_s} \overrightarrow{\Omega}^g_s}$$

2/ Cas particuliers

- *$O_s$ fixe dans Rg*

$$\boxed{\overrightarrow{\mu}^g_{(O_s)} = \overline{\overline{I}}_{O_s} \cdot \overrightarrow{\Omega}^g_s}$$

*Le tenseur d'inertie apparait donc comme l'opérateur linéaire qui fait passer du vecteur rotation au vecteur moment cinétique*

- *$O_s \equiv G$ ($O_s$ est le centre de gravité)*

$$\boxed{\overrightarrow{\mu}^g_{(G)} = \overline{\overline{I}}_G \cdot \overrightarrow{\Omega}^g_s}$$

3/ Formule de Koënig pour le solide

$$\overrightarrow{\mu}^g_{(C)} = \overrightarrow{\mu}^{g*}_{(G)} + \overrightarrow{CG} \wedge m \overrightarrow{V}^g_{(G)}$$

Mais comme on a affaire à un solide on a

$$\overrightarrow{\mu}^{g*}_{(G)} = \overline{\overline{I}}_G \cdot \overrightarrow{\Omega}^{g*}_s$$

Or le repère Rg* est en translation par rapport à Rg

$$\overrightarrow{\Omega}^{g*}_s = \overrightarrow{\Omega}^g_s$$

On a donc

$$\overrightarrow{\mu}^{g*}_{(G)} = \overline{\overline{I}}_G \cdot \overrightarrow{\Omega}^g_s$$

D'où la formule fondamentale et très générale pour le solide

$$\boxed{\overrightarrow{\mu}^g_{(C)} = \overline{\overline{I}}_G \cdot \overrightarrow{\Omega}^g_s + \overrightarrow{CG} \wedge M \overrightarrow{V}^g_{(G)}}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

## 4/ Exemple de calcul de moment cinétique

*exemple 1*

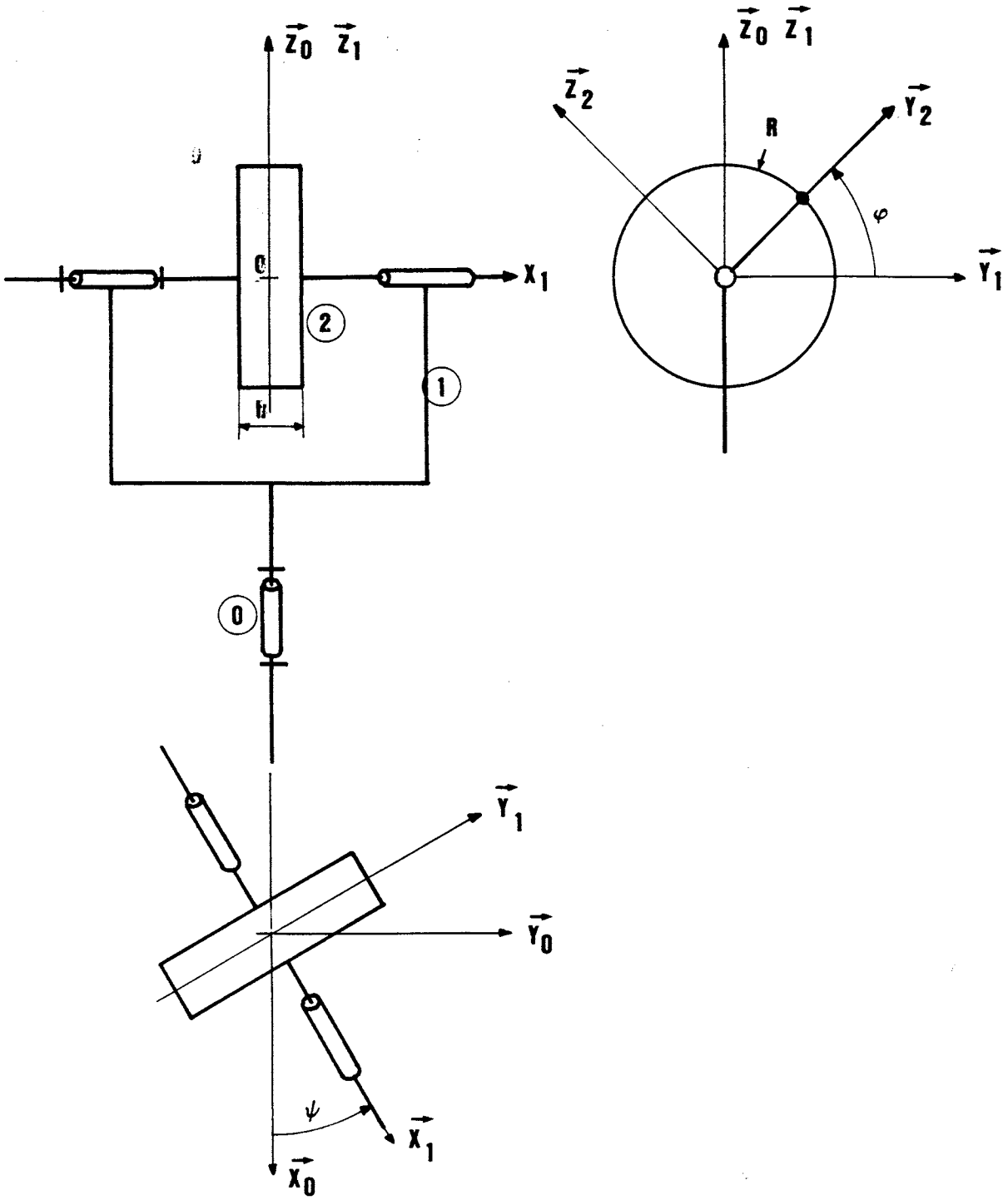



Fig 5.5

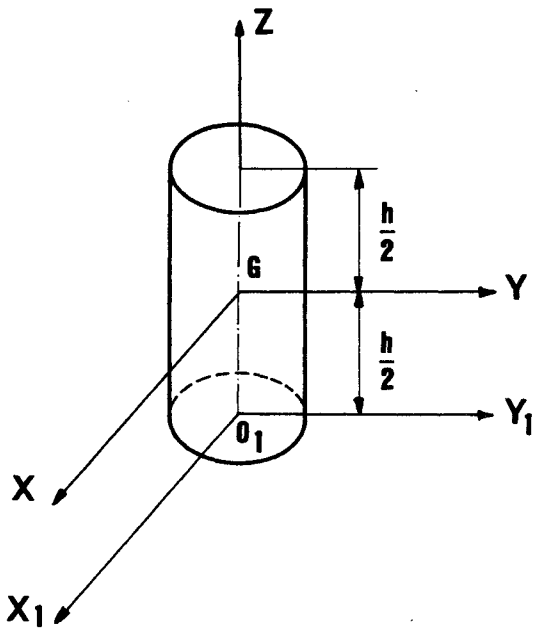
© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Un système est constitué d'un volant (2) cylindrique de masse M de rayon R et de hauteur h et d'une armature (1). L'armature (1), de masse négligeable, tourne autour d'un axe $\overrightarrow{Z_0}$ d'un repère $R_0$ et le volant (2) tourne autour d'un axe $\overrightarrow{X_1}$ de $(S_1)$ orthogonal et concourant avec $\overrightarrow{Z_0}$

Calculer le moment cinétique en O du volant dans le repère $R_0$.

- Tenseur d'inertie $\overline{\overline{I}}_0$

A l'aide du tableau de matrice on a immédiatement




$$I_{Gxyz} \begin{bmatrix} \frac{m}{12}\left[3R^2+h^2\right] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}\left[3R^2+h^2\right] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}$$

Fig 5.6

- vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_2^0}$ exprimé dans $R_2$

$$\overrightarrow{\Omega_2^0} = \overrightarrow{\Omega_2^1} + \overrightarrow{\Omega_1^0}$$

$$= \phi'\overrightarrow{x_2} + \psi'\overrightarrow{z_1}$$

or nous avons les matrices de changement de base

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$$\vec{\Omega}_2^o = \begin{bmatrix} \phi' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2} + \begin{bmatrix} 0 \\ \psi' \sin \phi \\ \psi' \cos \phi \end{bmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{\Omega}_2 = \begin{bmatrix} \phi' \\ \psi' \sin \phi \\ \psi' \cos \phi \end{bmatrix}_{R_2}$$

- <u>vecteur moment cinétique en O</u>

$$\vec{\mu}_o^o = [\, I \,]_{R_2} \begin{Bmatrix} \phi' \\ \psi' \sin \phi \\ \psi' \cos \phi \end{Bmatrix}_{R_2}$$

$$= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ & 0 & B \end{bmatrix}_{R_2} \begin{bmatrix} \phi' \\ \psi' \sin \phi \\ \psi' \cos \phi \end{bmatrix}_{R_2}$$

$$= \begin{bmatrix} A\phi' \\ B\psi' \sin \phi \\ B\psi' \cos \phi \end{bmatrix}_{R_2}$$

- <u>Remarque : expression de $\vec{\mu}_o^o$ dans $R_1$</u>

$$[\, \vec{\mu}_0^o \,]_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A\phi' \\ B\psi' \sin \phi \\ B\psi' \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A\phi' \\ B\psi' \cos \phi \sin \phi - B\psi' \sin \phi \cos \phi \\ B\psi' \sin^2 \phi + B\psi' \cos^2 \phi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A\phi' \\ 0 \\ B\psi' \end{bmatrix}_{R_1}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

On pouvait directement prévoir ce résultat. En effet dans le système d'axe $ox_1\ y_1\ z_1$ la matrice d'inertie s'écrit aussi

$$\overline{\overline{I}}_o = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{R_1}$$

car le corps est de révolution. Le moment d'inertie par rapport à n'importe quel axe perpendiculaire à $\overrightarrow{ox_1}$ et passant par o est le même (ou encore toutes les directions des plans perpendiculaires à $\overrightarrow{ox_1}$ passant par o sont propres).

On peut donc faire très facilement le calcul dans $(R_1)$

$$\overrightarrow{\Omega_1^o} = \begin{bmatrix} \phi' \\ 0 \\ \psi' \end{bmatrix}_{R_1}$$

Donc

$$\overrightarrow{\mu_{(0)}^o} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi' \\ 0 \\ \psi' \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mu_{(0)}^o} = \begin{bmatrix} A\phi' \\ 0 \\ B\psi' \end{bmatrix}_{R_1}$$

et l'on retrouve bien le résultat indiqué. On utilisera cette remarque toutes les fois que l'on a un corps de révolution car elle simplifie considérablement les calculs.

*exemple 2 : Torseur cinétique du rotor de la balance gyrostatique de Kelvin (éléments au point A)*

Un système est constitué de six solides $(S_0)$, $(S_1)$, $(S_2)$, $(S_3)$, $(S_4)$, $(S_5)$ disposés comme l'indique la figure I. $(S_0)$ est un solide formant le bâti de l'appareil. $(S_1)$, $(S_2)$, $(S_3)$, $(S_5)$ sont des barres qui sont liées de manière à demeurer toujours dans un même plan. $(S_4)$ est un volant. A $(S_0)$ on lie le repère $(R_0)$ : $[O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0]$. Le mouvement de $(S_1)/(S_0)$ est un mouvement de rotation autour de $(O, \vec{Z}_0)$. A $(S_1)$ on lie le repère $(R_1)$ : $[O, \vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1]$ :

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$\overrightarrow{Z_1} = \overrightarrow{Z_0}$

$\overrightarrow{X_1}$ arbitraire

$\overrightarrow{Y_1} = \overrightarrow{Z_1} \wedge \overrightarrow{X_1}$

On repère la rotation de $(R_1)/(R_0)$ par : $\psi = (\overrightarrow{X_0}, \overrightarrow{X_1})$

$(S_2)$ est une barre OB de longueur 2a. Le mouvement $(S_2)/(S_1)$ est un mouvement de rotation autour de $(B, \overrightarrow{Y_1})$. A $(S_2)$ on lie $(R_2)$ : $|B, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2|$.

$\vec{Y}_2 = \vec{Y}_1$

$\vec{Z}_2 = \dfrac{\overrightarrow{OB}}{2a}$

$\vec{X}_2 = \vec{Y}_2 \wedge \vec{Z}_2$

On repère la rotation de $(R_2)/(R_1)$ par : $\Theta = (\vec{Z}_1, \vec{Z}_2)$

$(S_3)$ est une barre homogène BA de longueur 2a. Le mouvement de $(S_3)/(S_2)$ est une rotation autour de l'axe $(B, \vec{Y}_2)$. D'autre part l'extrémité A de BA est assujettie à se déplacer autour de $(O, \vec{Z}_0)$ étant reliée en ce point à la barre $(S_5)$ qui a un mouvement de translation par rapport à $(R_1)$. A $(S_5)$ on peut donc lier le repère $(R_1')$ : $[A, \vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1]$. Le mouvement de $(S_3)$ par rapport à $(S_5)$ est une rotation autour de $[A, \vec{Y}_1]$. A $(S_3)$ on lie le repère $[A, X_3, Y_3, Z_3]$.

$\vec{Y}_3 = \vec{Y}_1$

$\vec{X}_3 = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{2a}$

$\vec{Z}_3 = \vec{X}_3 \wedge \vec{Y}_3$

On repère la rotation de $(R_3)/(R_1')$ par : $\Theta_1 = (\vec{Z}_1, \vec{Z}_3)$

On a immédiatement $\Theta_1 = \frac{\pi}{2} - \Theta)$. On éliminera $\Theta_1$ en fonction de $\Theta$ chaque fois qu'il se présentera dans les calculs.

Le solide $(S_4)$ est un volant en mouvement de rotation autour de la barre AB. A $(S_4)$ on lie le repère $(R_4)$ : $[G, \vec{X}_4, \vec{Y}_4, \vec{Z}_4]$.

G milieu de AB

$\vec{X}_4 = \vec{X}_3$

$\vec{Y}_4$ arbitraire

$\vec{Z}_4 = \vec{X}_4 \wedge \vec{Y}_4$

On repère la rotation de $(R_4)/(R_3)$ par $\phi = (\vec{Y}_3, \vec{Y}_4)$

La masse de $(S_4)$ est $M_4$ et son tenseur d'inertie $\overline{\overline{I}}_G$ est

$$\overline{\overline{I}}_G = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & B_4 \end{bmatrix}_{R_4}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

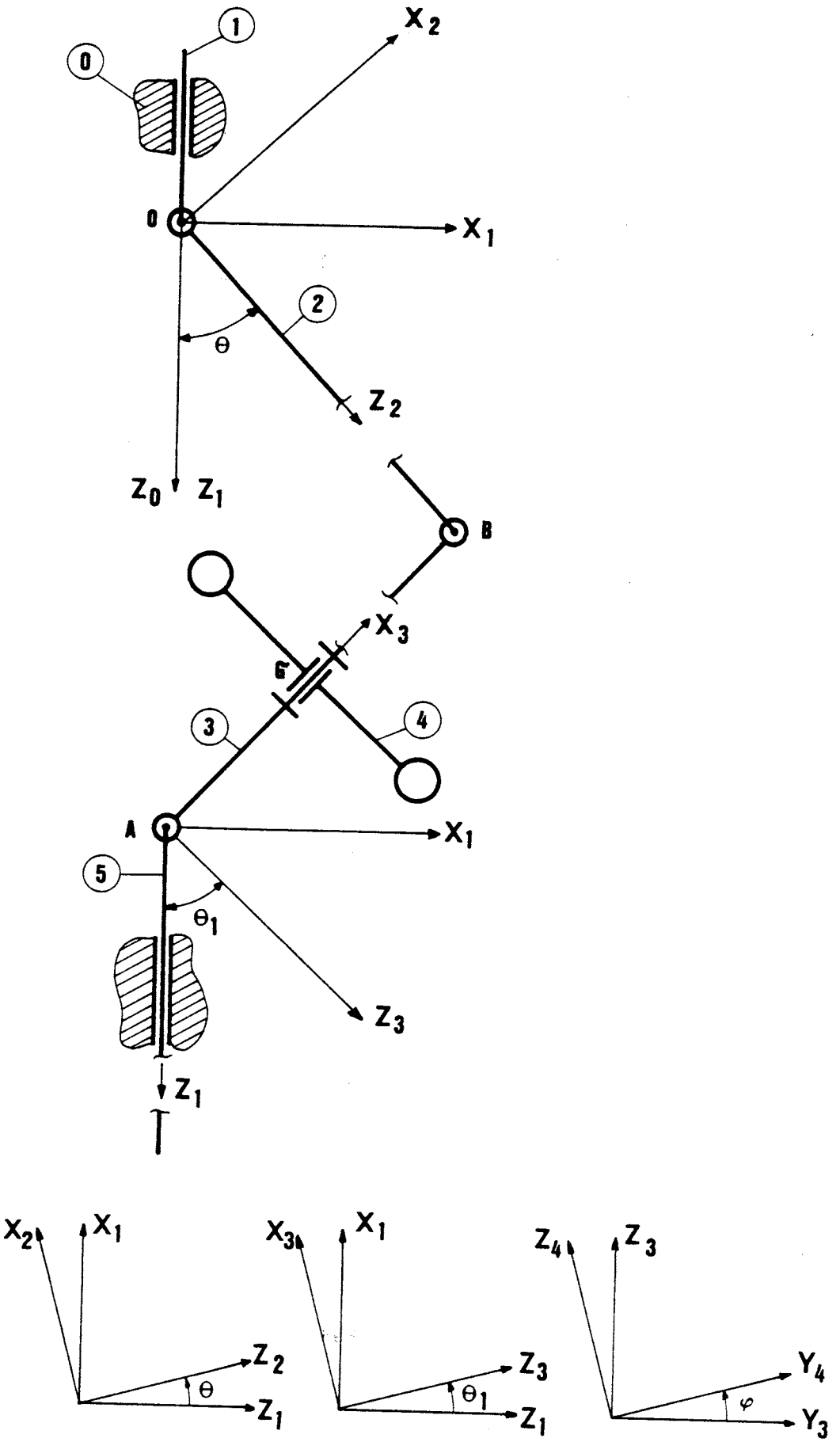



Fig 5.7

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

- calcul de la somme cinétique $\overrightarrow{\sigma^{\circ}}$

$$\overrightarrow{\sigma^{\circ}} = M_4 \, \overrightarrow{V^{\circ}_{(G)}}$$

$$\overrightarrow{V^{\circ}_{(G)}} = \overrightarrow{V^{\circ}_{(A)}} + \overrightarrow{\Omega^{\circ}_3} \wedge \overrightarrow{AG}$$

$$\overrightarrow{OA} = 4a \cos \Theta \, \overrightarrow{Z_0}$$

$$\overline{V^{\circ}_{(A)}} = - 4a \sin \Theta \, \Theta' \, \overrightarrow{Z_0}$$

$$\overline{Z_0} = \begin{bmatrix} - \sin \Theta_1 \\ 0 \\ \cos \Theta_1 \end{bmatrix}_{R_3}$$

$$\overline{Z_0} = \begin{bmatrix} - \cos \Theta \\ 0 \\ \sin \Theta \end{bmatrix}_{R_3}$$

$$\overrightarrow{V^{\circ}_{(A)}} = \begin{bmatrix} + 4a \sin \Theta \cos \Theta \, \Theta' \\ 0 \\ - 4a \sin^2 \Theta \, \Theta' \end{bmatrix}_{R_3}$$

$$\overline{\Omega_3} = \overline{\Omega^1_3} + \overline{\Omega^{\circ}_1}$$

$$= \Theta' \, Y_3 + \psi' \, \overrightarrow{Z_0}$$

$$\overline{\Omega^{\circ}_3} = - \Theta' \, \overline{Y}_3 + \psi' \begin{bmatrix} - \cos \Theta \\ 0 \\ \sin \Theta \end{bmatrix}$$

$$\overline{\Omega^{\circ}_3} = \begin{bmatrix} - \psi' \cos \Theta \\ - \Theta' \\ \psi' \sin \Theta \end{bmatrix}_{R_3}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$$\overrightarrow{AG} = a\,\overrightarrow{X_3}$$

$$\overrightarrow{\Omega_3^\circ} \wedge \overrightarrow{AG} = \begin{bmatrix} -\psi' \cos\Theta \\ -\Theta' \\ \psi' \sin\Theta \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ a\,\psi' \sin\Theta \\ a\,\Theta' \end{bmatrix}_{R_3}$$

$$\overrightarrow{V^\circ_{(G)}} = \begin{bmatrix} 4a \sin\Theta \cos\Theta\,\Theta' \\ a\,\psi' \sin\Theta \\ a\,\Theta' - 4a \sin^2\Theta\,\Theta' \end{bmatrix}_{R_3}$$

$$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{\sigma^\circ} = \begin{bmatrix} 4\,M_4\,a \sin\Theta \cos\Theta\,\Theta' \\ M_4\,a\,\psi' \sin\Theta \\ M_4(a\Theta' - 4a \sin^2\Theta\,\Theta' \end{bmatrix}_{R_3}$$

- <u>calcul du moment cinétique</u>

$$\overline{\mu^\circ_{(A)}} = \overline{\overline{I}_G}\,\overrightarrow{\Omega_4^\circ} + \overrightarrow{AG} \wedge M_4\,\overrightarrow{V^\circ_{(G)}}$$

$$\overline{\Omega_4^\circ} = \overrightarrow{\Omega_4^3} + \overline{\Omega_3^\circ}$$

$$\overline{\Omega_4^\circ} = \phi'\,\overline{X_3}$$

$$\overrightarrow{\Omega_4^\circ} = \begin{bmatrix} \phi' - \phi' \cos\Theta \\ -\Theta' \\ \psi' \sin\Theta \end{bmatrix}_{R_4}$$

Le tenseur d'inertie $\overline{\overline{I}_G}$ a même matrice d'inertie dans $(R_3)$ que dans $(R_4)$ car le corps est dynamiquement de révolution

$$\overline{\overline{I}_G}\,\overline{\Omega_4^\circ} = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi' - \psi' \cos\Theta \\ -\Theta' \\ \psi' \sin\Theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_4\,(\phi' - \psi' \cos\Theta) \\ -B_4\,\Theta' \\ B_4\,\psi' \sin\Theta \end{bmatrix}_{R_3}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$$\overline{AG} \wedge M_4 \overline{V^{\circ}_{(G)}} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 4\, M_4\, a \sin\Theta \cos\Theta\, \Theta' \\ M_4\, a\, \psi' \sin\Theta \\ M_4\, (a - 4a \sin^2\Theta)\, \Theta' \end{bmatrix}_{R_3}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -4\, M_4\, a^2\, (1 - 4 \sin^2\Theta)\, \Theta' \\ M_4\, a^2\, \psi' \sin\Theta \end{bmatrix}_{R_3}$$

$$\overrightarrow{\mu^{\circ}}_{(A)} = \begin{bmatrix} A_4\, (\phi' - \psi' \cos\Theta) \\ -\left[B_4 + 4\, M_4\, a^2\, (1 - 4 \sin^2\Theta)\right] \Theta' \\ (B_4 + M_4\, a_2)\, \psi' \sin\Theta \end{bmatrix}_{R_3}$$

## 5.2 TORSEUR DYNAMIQUE

### 5.2.1 Définition concernant l'élément de matière dm entourant P

a) *quantité d'accélération élémentaire*

$$d\, \overrightarrow{\sum}^{g} = J^{g}_{(P)}\, dm$$

b) *moment dynamique élémentaire en C*

$$\overrightarrow{\delta^{g}_{(C)}} = \overrightarrow{CP} \wedge \overrightarrow{J^{g}_{(P)}}\, dm$$

### 5.2.2 Torseur des quantités d'accélération ou torseur dynamique

A l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{J^{\circ}_{(P)}}$ dm on peut faire correspondre le torseur dont les éléments sont :

a) *la quantité d'accélération totale ou somme dynamique*

$$\overrightarrow{\sum}^{g} = \int_{P \in S} \overrightarrow{J^{g}_{(P)}}\, dm$$

b) *le moment dynamique du système en un point C quelconque*

$$\overrightarrow{\delta^{g}_{(C)}} = \int_{P \in S} \overrightarrow{CP} \wedge \overrightarrow{J^{g}_{(P)}}\, dm$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Les calculs du torseur dynamique se feront à partir du torseur cinétique tout au moins pour le moment dynamique car l'intégrale $\int_{P\varepsilon S} \overline{CP} \wedge \vec{J}^{g}_{(P)}\, dm$ ne conduit pas à une formule remarquable

## 5.3 RELATIONS ENTRE LE TORSEUR CINETIQUE ET LE TORSEUR DYNAMIQUE. CALCUL DU TORSEUR DYNAMIQUE

### 5.3.1 Relation en $\vec{\sum}^{g}$ et $\vec{\sigma}^{g}$. Calcul de $\vec{\sum}^{g}$

$$\vec{\sigma}^{g} = \int_{P\varepsilon S} \vec{V}^{g}_{(P)}\, dm$$

$$\vec{\sum}^{g} = \int_{P\varepsilon S} \vec{J}^{g}_{(P)}\, dm$$

$$\vec{\sum}^{g} = \int_{P\varepsilon S} \frac{d^{g}}{dt} \vec{V}^{g}_{(P)}\, dm$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{P\varepsilon S} \overline{V^{g}_{(P)}}\, dm$$

$$\vec{\sum}^{g} = \frac{d^{g}}{dt}\, m\, \vec{V}^{g}_{(G)}$$

$$\boxed{\vec{\sum}^{g} = \frac{d^{g}}{dt} \vec{\sigma}^{g}}$$

*La somme géométrique dynamique est égale à la dérivée par rapport au temps de la somme géométrique cinétique.*

On peut encore écrire

$$\vec{\sum}^{g} = \frac{d^{g}}{dt}\, m\, \vec{V}^{g}_{(G)}$$

$$\boxed{\vec{\sum}^{g} = m\, \vec{J}^{g}_{(G)}}$$

*La quantité d'accélération totale est égale à la quantité d'accélération du centre d'inertie affectée de la masse totale.*

En général c'est ce dernier théorème que nous utiliserons pour les calculs pratiques.

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

### 5.3.2 Relation entre le moment cinétique et le moment dynamique. Calcul du moment dynamique

a) *Formule générale*

$$\overrightarrow{\mu^g_{(C)}} = \int_{P\varepsilon S} \overrightarrow{CP} \wedge \overrightarrow{V^g_{(P)}}\, dm$$

$$\overrightarrow{\delta^g_{(C)}} = \int_{P\varepsilon s} \overrightarrow{CP} \wedge \overrightarrow{J^g_{(P)}}\, dm$$

$$\frac{d^g}{dt}\overrightarrow{\mu^g_{(C)}} = \int_{P\varepsilon S} d^g \frac{\overrightarrow{CP}}{dt} \wedge \overrightarrow{V^g_{(P)}}\, dm + \int_{P\varepsilon S} \overrightarrow{CP} \wedge \frac{d^g}{dt}\overrightarrow{V^g_{(P)}}\, dm$$

$$\frac{d^g}{dt}\overrightarrow{\mu^g_{(C)}} = \int_{P\varepsilon S} \frac{d^g}{dt}\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{V^g_{(P)}}\, dm - \int_{P\varepsilon S} \frac{d^g\overrightarrow{OC}}{dt} \wedge \overrightarrow{V^g_{(P)}}\, dm + \int_{P\varepsilon S} \overrightarrow{CP} \wedge \overrightarrow{J^g_{(P)}}\, dm$$

$$\frac{d^g}{dt}\overrightarrow{\mu^g_{(C)}} = 0 - \int_{P\varepsilon S} \overrightarrow{V^g_{(C)}} \wedge \overrightarrow{V^g_{(G)}}\, dm + \overrightarrow{\delta^g_{(C)}}$$

$$= -\overrightarrow{V^g_{(C)}} \wedge \int_{P\varepsilon S} \overrightarrow{V^g_{(G)}}\, dm + \overline{\delta^g_{(C)}}$$

$$= -M\,\overline{V^g_{(C)}} \wedge \overrightarrow{V^g_{(G)}} + \overline{\delta^g_{(C)}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\delta^g_{(C)}} = \frac{d^g}{dt}\overrightarrow{\mu^g_{(C)}} + M\,\overrightarrow{V^g_{(C)}} \wedge \overrightarrow{V^g_{(G)}}}$$

Il est à noter que dans cette formule la vitesse $\overrightarrow{V^g_{(C)}}$ est la vitesse du point géométrique C.

Le terme $M\,\overrightarrow{V^g_{(C)}} \wedge \overrightarrow{V^g_{(G)}}$ est dit terme complémentaire.

b) *cas de simplification :* $\overrightarrow{V^g_{(C)}} \wedge \overrightarrow{V^g_{(G)}} = 0$

1/ $\overrightarrow{V^g_{(C)}} = 0 \longrightarrow$ C fixe

*Le moment dynamique en un point fixe est égal à la dérivée du moment cinétique*

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$$\vec{\delta}^{g}_{(C)} = \frac{d^g}{dt}\,\vec{\mu}^{g}_{(C)} \qquad C \text{ fixe}$$

2/ $C \equiv G$ $\qquad \vec{V}^{g}_{(C)} \wedge \overline{V}^{g}_{(G)} = 0$

(ou deux vecteurs équipollents)

*Le moment dynamique calculé au centre d'inertie est égal à la dérivée du moment cinétique calculé au centre d'inertie.*

$$\vec{\delta}^{g}_{(G)} = \frac{d^g}{dt}\,\vec{\mu}^{g}_{G}$$

3/ $\vec{V}^{g}_{(G)} \wedge \vec{V}^{g}_{(C)} = 0$ $\qquad$ avec $\vec{V}_C$ et $\vec{V}_G \neq 0$

Les deux vecteurs sont parallèles

*exemple 1*

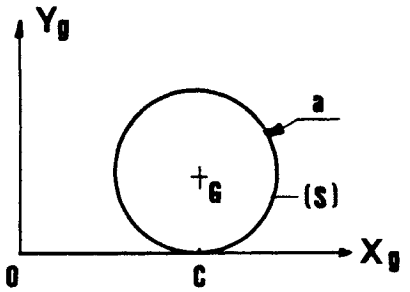



Fig 5.8

Un disque de masse m roule sans glisser sur l'axe O, $\vec{X}_g$. Son plan médian reste dans le plan O, $\vec{X}_g$, $\vec{Y}_g$. Calculez le terme complémentaire

$$\vec{\delta}^{g}_{(C)} = \frac{d^g}{dt}\,\vec{\mu}^{g}_{(C)} + m\,\overline{V}^{g}_{(C)} \wedge \overline{V}^{g}_{(G)}$$

$$\vec{GC} = -\,a\,\vec{Y}_g$$

$$(\vec{OC} - \vec{OG}) = -\,a\,\vec{Y}_g$$

$$\vec{V}^{g}_{(C)} - \vec{V}^{g}_{(G)} = 0$$

Le terme complémentaire est nul.

Il faut bien remarquer que $\vec{V}^{g}_{(C)}$ est la vitesse du point géométrique, une confusion est souvent facile. Prenons le cas où il y a roulement sans glissement : on a alors $\vec{V}^{g}_{S}(I) = 0$. Mais cette vitesse n'a rien à voir avec la vitesse $\vec{V}^{g}_{(I)}$. Il serait entièrement faux de dire que le terme complémentaire est nul parce que $\vec{V}^{g}_{S}(I) = 0$ !

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

*exemple 2 : Calculer le terme complémentaire dans le cas d'une sphère qui est au contact d'une autre sphère.*

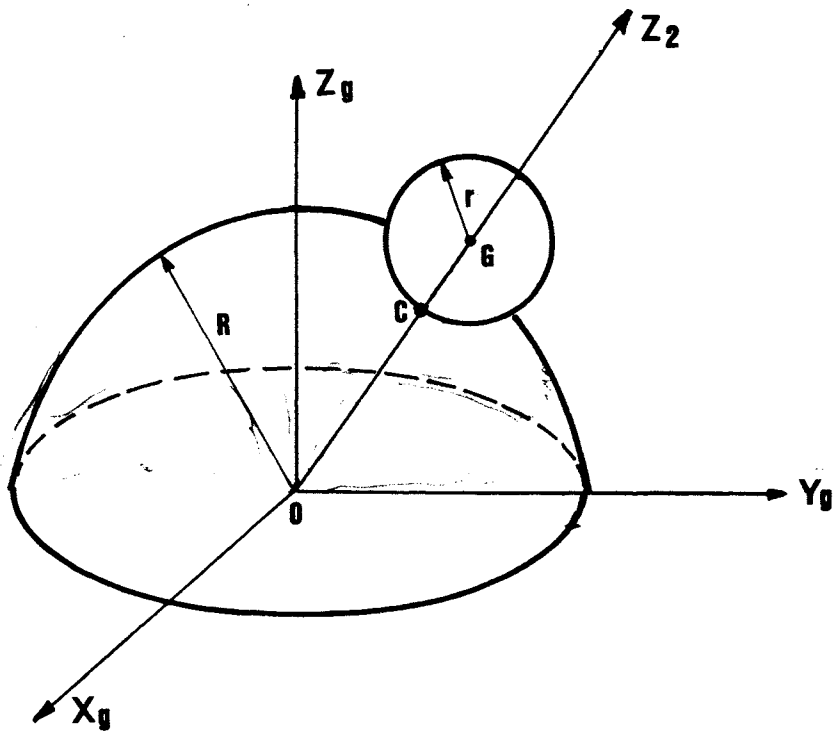



Fig 5.9

$$\overrightarrow{\delta_{(C)}} = \frac{d^g}{dt}\,\overrightarrow{\mu^g_{(C)}} + M\,\overrightarrow{V^g_{(C)}} \wedge \overrightarrow{V^g_{(G)}}$$

$$\overrightarrow{OG} = (R + r)\,\overrightarrow{Z_2}$$

$$\overrightarrow{OC} = R\,\overrightarrow{Z_2}$$

$$\overrightarrow{V^g_{(G)}} = (R + r)\,\frac{d^g}{dt}\,\overrightarrow{Z_2}$$

$$\overrightarrow{V^g_{(C)}} = R\,\frac{d^g}{dt}\,\overrightarrow{Z_2}$$

donc

$$\overrightarrow{V^g_{(G)}} = \frac{R + r}{R}\,\overrightarrow{V^g_{(C)}}$$

Les deux vecteurs $\overrightarrow{V^g_{(G)}}$ et $\overrightarrow{V^g_{(C)}}$ sont colinéaires. Par suite le terme complémentaire est nul.

Donc $$\overrightarrow{\delta^g_{(C)}} = \frac{d^g}{dt}\,\overrightarrow{\mu^g_{(C)}}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

c) *Le terme complémentaire cependant est assez souvent différent de zéro :*

*exemple :* Une bille de rayon r est au contact d'un cylindre au point C. Calculer le terme complémentaire du moment dynamique en C.

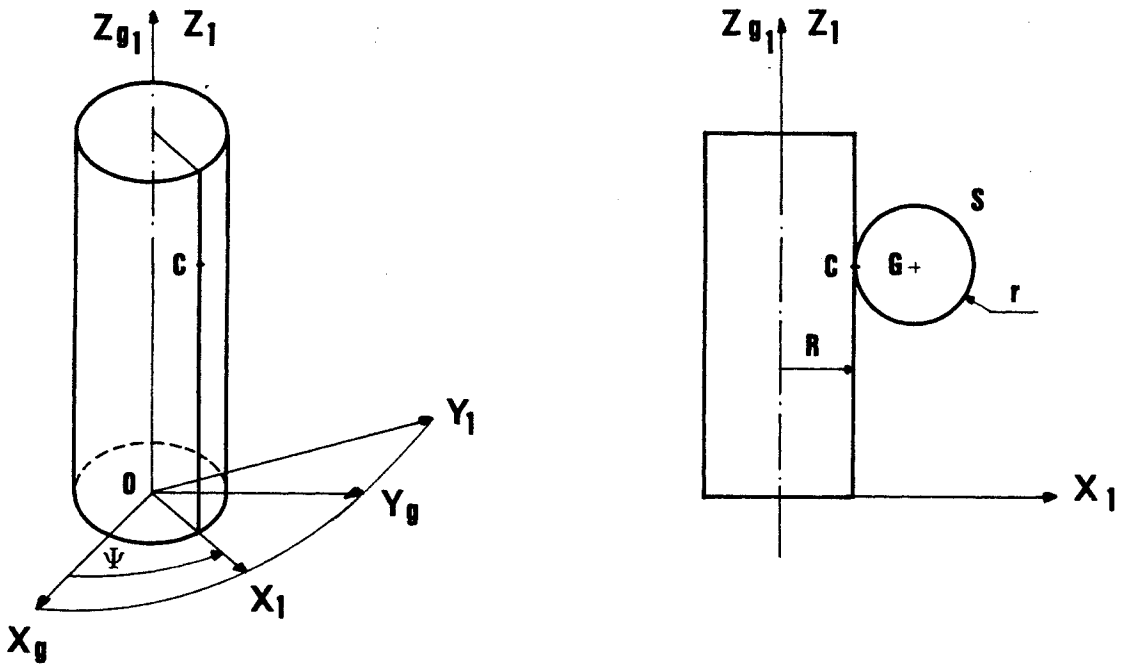



Fig 5.10

Repérons G par ses coordonnées cylindro polaires

$$\overrightarrow{OG} = (R + r)\,\overrightarrow{X_1} + z.\overrightarrow{Z_g}$$

$$(\overrightarrow{X_g}, \overrightarrow{X_1}) = \psi$$

On a de même

$$\overrightarrow{OC} = R\,\overrightarrow{X_1} + z.\overrightarrow{Z_g}$$

$$\overrightarrow{V^g_{(G)}} = (R + r)\,\frac{d^g}{dt}\,\overrightarrow{X_1} + z'.\overrightarrow{Z_g}$$

$$\overline{V^g_{(G)}} = (R + r)\,\psi'\,\overrightarrow{Y_1} + z'\overrightarrow{Z_1}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

De même

$$\overrightarrow{V^g_{(C)}} = R\,\psi'\,\overrightarrow{Y_1} + z'.\overrightarrow{Z_1}$$

$$\overrightarrow{V^g_{(C)}} \wedge \overrightarrow{V^g_{(G)}} = \begin{bmatrix} 0 \\ R\,\psi' \\ z' \end{bmatrix}_{R_1} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ (R + r)\,\psi' \\ z' \end{bmatrix}_{R_1}$$

$$= \begin{bmatrix} -\,r\,z'\,\psi' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1}$$

On a donc

$$\overrightarrow{\delta^g_{(C)}} = \frac{d^g}{dt}\,\overrightarrow{\mu^g_C} - M\,r\,z'\,\psi'.\,\overrightarrow{X_1}$$

d) *exemple de calcul de torseur dynamique*

Reprenons le cas de la balance de Kelvin.

1/ *Somme dynamique*

$$\overrightarrow{\sum^\circ} = M_4\,\overrightarrow{J^\circ_{(G)}}$$

$$\overrightarrow{J^\circ_{(G)}} = \frac{d^3}{dt}\,\overrightarrow{V^\circ_{(G)}} + \overrightarrow{\Omega^\circ_3} \wedge \overrightarrow{V^\circ_{(G)}}$$

$$\frac{d^3}{dt}\,\overline{V^\circ_{(G)}} = \begin{bmatrix} 4a \sin\Theta \cos\Theta\,\Theta'' + 4a \cos^2\Theta\,\Theta^{12} - 4a \sin^2\Theta\,\Theta^{12} \\ a\,\psi'' \sin\Theta + a\,\psi'\,\Theta' \cos\Theta \\ a\,\Theta'' - 4a \sin^2\Theta\,\Theta'' - 8a \sin\Theta \cos\Theta\,\Theta^{12} \end{bmatrix}_{R_3}$$

$$\overline{\Omega^\circ_3} \wedge \overline{V^\circ_{(G)}} = \begin{bmatrix} -\psi' \cos\Theta \\ -\,\Theta' \\ \psi' \sin\Theta \end{bmatrix}_{R_3} \wedge \begin{bmatrix} 4a \sin\Theta \cos\Theta\,\Theta' \\ a\,\psi' \sin\Theta \\ a(1 - 4 \sin^2\Theta)\,\Theta' \end{bmatrix}_{R_3}$$

$$\overline{\Omega^\circ_3} \wedge \overrightarrow{V^\circ_{(G)}} = \begin{bmatrix} -\,a\,\psi'' \sin^2\Theta + a(1 - 4 \sin^2\Theta)\,\Theta^{12} \\ +\,a(1 - 4 \sin^2\Theta) \cos\Theta\,\psi'\,\Theta' + 4a \sin^2\Theta \cos\Theta\,\psi'\,\Theta' \\ -\,a\,\psi^{12} \sin\Theta \cos\Theta + 4a \sin\Theta \cos\Theta\,\Theta^{12} \end{bmatrix}_{R_3}$$

$$\overrightarrow{\sum^\circ} = \begin{bmatrix} 4a \sin\Theta \cos\Theta\,\Theta'' - a\,\psi^{12} \sin^2\Theta + 4a \cos^2\Theta\,\Theta^{12} - a\,\Theta^{12} \\ a\,\psi'' \sin\Theta + 2a \cos\Theta\,\psi'\,\Theta' \\ a\,\Theta'' - 4a \sin^2\Theta\,\Theta'' - a\,\psi^{12} \sin\Theta \cos\Theta - 8a \sin\Theta \cos\Theta^{12} \end{bmatrix}_{R_3}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

2/ *calcul du moment dynamique* $\overline{\delta^{\circ}_{(A)}}$

$$\overrightarrow{\delta^{\circ}_{(A)}} = \frac{d^{\circ}}{dt}\overrightarrow{\mu^{\circ}_{(A)}} + M_4 \overrightarrow{V^{\circ}_{(A)}} \wedge \overrightarrow{V^{\circ}_{(G)}}$$

$$\frac{d^{\circ}}{dt}\overrightarrow{\mu^{\circ}_{(A)}} = \frac{d^{3}}{dt}\overrightarrow{\mu^{\circ}_{(A)}} + \overrightarrow{\Omega^{\circ}_{3}} \wedge \overrightarrow{\mu^{\circ}_{(A)}}$$

$$\frac{d^{\circ}}{dt}\overrightarrow{\mu^{\circ}_{(A)}} = \begin{bmatrix} A_4\ (\phi'' + \psi'\ \Theta'\ \sin\Theta - \psi''\cos\Theta) \\ -\left[B_4 + 4\ M\ a^2(1 - \sin^2\Theta)\right]\Theta'' + 32\ M_4\ a^2 \sin\Theta\cos\Theta\ \Theta'^2 \\ (B_4 + M_4\ a^2)\ \psi''\sin\Theta + (B_4 + M_4\ a^2)\ \psi'\ \Theta'\cos\Theta \end{bmatrix}_{R_3}$$

$$\overrightarrow{\Omega^{\circ}_{3}} \wedge \overrightarrow{\mu^{\circ}_{(A)}} = \begin{bmatrix} -\psi'\cos \\ -\Theta' \\ \psi'\sin\Theta \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} A_4\ (\phi' - \psi'\cos\Theta) \\ -\left[B_4 + 4\ M\ a^2\ (1 - 4\sin^2\Theta)\right]\Theta' \\ \left[B_4 + M_4\ a^2\right]\psi'\sin\Theta \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\Omega^{\circ}_{3}} \wedge \overrightarrow{\mu^{\circ}_{(A)}} = \begin{bmatrix} -(B_4 + M_4 a^2)\ \psi'\Theta'\sin\Theta + \left[B_4 + 4M_4 a^2\ (1 - 4\sin^2\Theta)\right]\Theta'\psi'\sin\Theta \\ (B_4 + M_4 a^2)\ \psi'^2\sin\Theta\cos\Theta + A_4(\phi' - \psi'\cos\Theta)\ \psi'\sin\Theta \\ \left[B_4 + 4M_4 a^2\ (1 - 4\sin^2\Theta)\right]\Theta'\ \psi'\cos\Theta - A_4(\phi' - \psi'\cos\Theta)\Theta' \end{bmatrix}_{R_3}$$

$$M_4\ \overrightarrow{V^{\circ}_{(A)}} \wedge \overrightarrow{V^{\circ}_{(G)}} = \begin{bmatrix} 4a\sin\Theta\cos\Theta\ \Theta' \\ 0 \\ -4a\sin^2\Theta\ \Theta' \end{bmatrix}_{R_3} \wedge \begin{bmatrix} 4a\sin\Theta\cos\Theta\ \Theta' \\ a\ \psi'\sin\Theta \\ a\ (1 - 4a\sin^2\Theta)\ \Theta' \end{bmatrix}_{R_3}$$

$$= \begin{bmatrix} 4a^2\sin^3\Theta\ \Theta'\ \psi' \\ 4a^2\sin\Theta\cos\Theta(1-4a\sin^2\Theta)\ \Theta'^2 + 16a^2\sin^3\Theta\cos\Theta\ \Theta'^2 \\ 4a^2\sin^2\Theta\cos\Theta\ \Theta'\ \psi' \end{bmatrix} M_4$$

$$= \begin{bmatrix} 4a^2\sin^3\Theta\ \Theta'\ \psi' \\ 4a^2\sin\Theta\cos\Theta\ \Theta'^2 \\ 4a^2\sin^2\Theta\cos\Theta\ \Theta'\ \psi' \end{bmatrix}_{R_3} M_4$$

$$\delta^{\circ}_{(A)} = \begin{bmatrix} A_4\ (\phi'' + \psi'\Theta'\sin\Theta - \psi''\cos\Theta) - 3M_4\ a^2\ \psi'\Theta\Theta'\cos\Theta \\ -\left[B_4 + 4Ma^2(1-\sin^2\Theta)\right]\Theta'' + (B_4 + M_4 a^2)\psi'^2\sin\Theta\cos\Theta + 36M_4 a^2\sin\Theta\cos\Theta\ \Theta'^2 \\ \qquad + A_4(\phi' - \psi'\cos\Theta)\psi'\sin\Theta \\ (B_4 + M_4 a^2)\psi''\sin\Theta + 2(B_4 + 4Ma^2)\psi'\Theta'\cos\Theta - 12Ma^2\Theta'\psi'\sin^2\Theta\cos\Theta - A_4(\phi'\psi'\cos\Theta)\Theta' \end{bmatrix}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

## 5.4 ENERGIE CINETIQUE

### 5.4.1 Définitions concernant l'énergie cinétique

a) *Energie cinétique dans Rg d'un élément de masse dm entourant P*

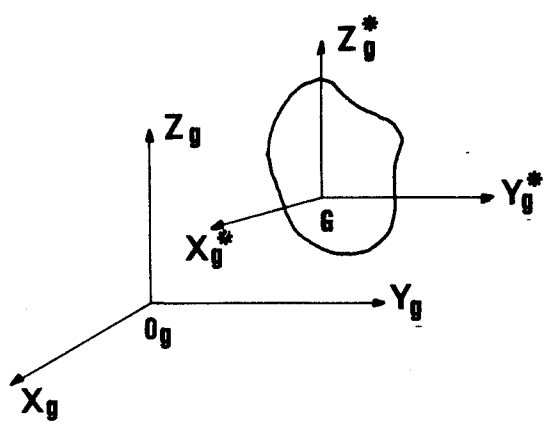
$$\boxed{d\,T^g = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{V^g_{(P)}}\right)^2 dm}$$

b) *Energie cinétique d'un système*

$$\boxed{T^g = \frac{1}{2}\int_{P\varepsilon S} (\overrightarrow{V^g})^2\, dm}$$

L'énergie cinétique est donc toujours positive ou nulle.

### 5.4.2 Théorème de Koënig




Repère $R_g^*$ ou repère de Koënig

$$\overrightarrow{X_g^*} = \overrightarrow{X_g}$$
$$\overrightarrow{Y_g^*} = \overrightarrow{Y_g}$$
$$\overrightarrow{Z_g^*} = \overrightarrow{Z_g}$$

Fig 5.11

$$T^g = \frac{1}{2}\int_{P\varepsilon S}\left(\overrightarrow{V^g_{(P)}}\right)^2 dm$$

$$\overrightarrow{V^g_{(P)}} = \overrightarrow{V^{g*}_{(P)}} + \overrightarrow{V^g_{g*}}\,(P)$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$$\overrightarrow{V^{g2}_{(P)}} = \left[\overrightarrow{V^{g*}_{(P)}}\right]^2 + \left[\overrightarrow{V^{g*}_{g}}(P)\right]^2 + 2\,\overrightarrow{V^{g*}_{(P)}} \cdot \overrightarrow{V^{g}_{g*}}(P)$$

$$\overrightarrow{V^{g}_{g*}}(P) = \overrightarrow{V^{g}_{(G)}}$$ car Rg* est en translation par rapport à Rg

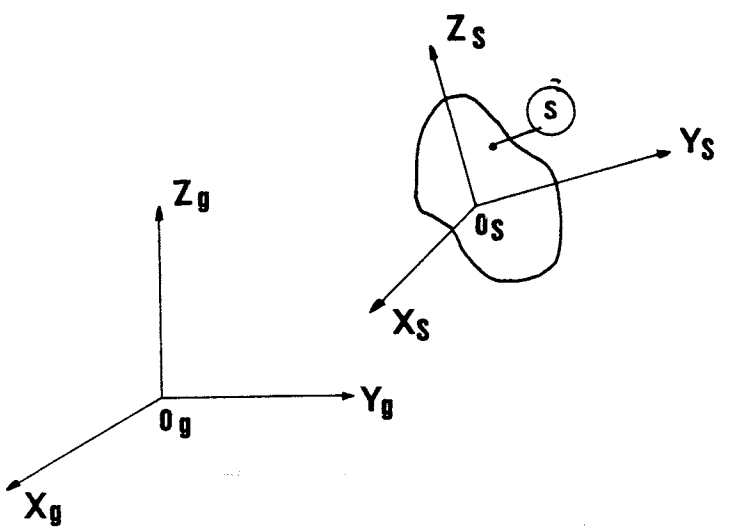
$$T^g = \frac{1}{2}\int_{P\varepsilon S}\left[\overrightarrow{V^{g*}_{(P)}}\right]^2 dm + \frac{1}{2}\int_{P\varepsilon S}\left[\overrightarrow{V^{g}_{(G)}}\right]^2 dm + \int_{P\varepsilon S}\overrightarrow{V^{g*}_{(P)}} \cdot \overrightarrow{V^{g}_{(G)}}\, dm$$

$$T^g = T^{g*} + \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{V^{g}_{G}})^2 \int_{P\varepsilon S} dm + \overrightarrow{V^{g}_{(P)}} \cdot \int_{P\varepsilon S}\overrightarrow{V^{g*}_{(P)}}\, dm$$

$$\boxed{T^g = T^{g*} + \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{V^{g}_{G}})^2 \cdot m}$$

Théorème : *L'énergie cinétique calculée dans Rg est égale à l'énergie cinétique dans le mouvement "autour du centre d'inertie", augmentée de l'énergie cinétique du centre d'inertie affecté de la masse totale.*

### 5.4.3 Energie cinétique d'un solide ayant un point fixe $O_s$ dans Rg




Soit un système d'axe $R_s$ : $(O_s, \overrightarrow{X_s}, \overrightarrow{Y_s}, \overrightarrow{Z_s})$ lié au solide (S)

$$\overrightarrow{V^{g}_{(O_s)}} = 0$$

$$\overrightarrow{V^{g}_{(P)}} = \overrightarrow{\Omega^{g}_{s}} \wedge \overrightarrow{O_sP}$$

Fig 5.12

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$$T^g = \frac{1}{2} \int_{P\varepsilon S} (\overrightarrow{\Omega_s^g} \wedge \overrightarrow{O_sP})^2 \, dm$$

$$T^g = \frac{1}{2} \int_{P\varepsilon S} (\overrightarrow{\Omega_s^g} \wedge \overrightarrow{O_sP}) \cdot (\Omega_s^g \wedge \overrightarrow{O_sP}) \, dm$$

$$T^g = \frac{1}{2} \int_{P\varepsilon S} \left| \vec{\Omega}_s^g , \vec{O_sP} , (\vec{\Omega}_s^g \wedge \vec{O_sP}) \right| dm$$

$$= \frac{1}{2} \int_{P\varepsilon S} \{ \overrightarrow{\Omega_j^g} \cdot \Omega$$

$$T^g = \frac{1}{2} \quad \overrightarrow{\Omega_s^g} \int_{P\varepsilon S} [\overrightarrow{O_sP} \wedge (\overrightarrow{\Omega_s^g} \wedge \overrightarrow{O_sP})] dm$$

$$T^g = \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_s^g} \int_{P\varepsilon S} [\overrightarrow{O_sP} \wedge (\overrightarrow{\Omega_s^g} \wedge \overrightarrow{O_sP})] \, dm$$

Or on a vu que

$$\int_{P\varepsilon S} [O_sP \wedge (\overrightarrow{\Omega_s^g} \wedge \overrightarrow{O_sP})] \, dm = \overline{\overline{I}}_{O_s} \cdot \overrightarrow{\Omega_s^g}$$

$$\boxed{T^g = \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_s^g} \, \overline{\overline{I}}_{O_s} \, \overrightarrow{\Omega_s^g}}$$

L'énergie cinétique est une forme quadratique

Si, par exemple $\overrightarrow{\Omega_s^g} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_{R_s}$ $\quad \overline{\overline{I}}_{R_s} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -E \\ -E & -F & C \end{bmatrix}_{R_s}$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$$T^g = \frac{1}{2}\left[p,\ q,\ r\right]\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$T^g = \frac{1}{2}\left[Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Fpq - 2Dqr - 2Epr\right]$$

Si les axes sont principaux, on a

$$T^g = \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right)$$

### 5.4.4 Théorème de Koënig pour le solide

$$T^g = T^{g*} + \frac{1}{2}\, m\, (\overrightarrow{V_G^g})^2$$

$$T^{g*} = \frac{1}{2}\, \overrightarrow{\Omega_s^{g*}} \cdot \overline{\overline{I_G}}\ \overrightarrow{\Omega_s^{g*}}$$

Mais $\overrightarrow{\Omega_s^{g*}} = \overrightarrow{\Omega_s^g}$

$$\boxed{T^g = \frac{1}{2}\, \overrightarrow{\Omega_s^g}\ \overline{\overline{I_G}} \cdot \overrightarrow{\Omega_s^g} + \frac{1}{2}\, m\, (\overrightarrow{V_G^g})^2}$$

C'est la formule générale qui permet de calculer l'énergie cinétique d'un solide.

### 5.4.5 Exemple

Calculer l'énergie cinétique du modèle simplifié d'une roue avant d'un train tricycle d'avion (modèle destiné à étudier le shimmy).

Le système est constitué, comme l'indique la figure, de cinq solides $(S_0)$, $(S_0^*)$, $(S_1)$, $(S_2)$, $(S_3)$. $(S_0)$ est la route, $(S_0^*)$ est un chariot animé par rapport à $(S_0)$ d'une translation rectiligne et uniforme parallèle au sol, grâce à une liaison prismatique parfaite. La liaison $(S_1)/(S_0^*)$ est une liaison prismatique parfaite, d'axe orthogonal à la précédente, et parallèle au sol. En outre, $(S_1)$ et $(S_0^*)$ sont reliés par un ressort. La liaison $(S_2)/(S_1)$ est une liaison rotoïde parfaite, d'axe orthogonal aux axes des deux liaisons prismatiques. La liaison $(S_3)/(S_2)$ est une liaison rotoïde d'axe normal à l'axe de la liaison rotoïde $(S_2)/(S_1)$. $(S_3)$ est une roue rigide de centre $O_3$, de rayon R, qui roule sans glisser sur $(S_0)$ au point I.

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

A $(S_0)$ on lie le repère $(O, \overrightarrow{X_0}, \overrightarrow{Y_0}, \overrightarrow{Z_0})$ supposé galiléen.

$\overrightarrow{X_0}$ porté par l'axe de la liaison $(S_0^*)/(S_0)$

$\overrightarrow{Z_0}$ vertical ascendant

$\overrightarrow{Y_0} = \overrightarrow{Z_0} \wedge \overrightarrow{X_0}$

A $(S_0^*)$ on lie le repère $(R_0^*)$ : $(O^*, X_0^*, Y_0^*, Z_0^*)$

$O^* \in O, \overrightarrow{X_0}$

$\overrightarrow{X_0^*} = \overrightarrow{X_0}$

$\overrightarrow{Y_0^*} = \overrightarrow{Y_0}$

$\overrightarrow{Z_0^*} = \overrightarrow{Z_0}$

On a $\overrightarrow{OO^*} = tV\overrightarrow{X_0}$ V : constante algébrique

A $(S_1)$ on lie $(O_1, \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{Y_1}, \overrightarrow{Z_1})$

$O_1$ à l'intersection des axes des liaisons prismatiques $(S_1)/(S_0^*)$ et $(S_2)/(S_1)$

$\overrightarrow{X_1} = \overrightarrow{X_0}$

$\overrightarrow{Y_1} = \overrightarrow{Y_0}$

$\overrightarrow{Z_1} = \overrightarrow{Z_0}$

On repère $(R_1)/(R_0)$ par y tel que $\overrightarrow{O^*O_1} = y.\overrightarrow{Y_1}$

A $(S_2)$ on lie $(O_2, X_2, Y_2, Z_2)$

$O_2$ dans le même plan horizontal que $O_3$ $\in$ à l'axe de la liaison $(S_2)/(S_1)$. On a $\overrightarrow{O_1O_2} = d\overrightarrow{Z_2}$

$\overrightarrow{X_2} = \dfrac{\overrightarrow{O_3O_2}}{l}$

$\overrightarrow{Z_2} = \overrightarrow{Z_1}$

$\overrightarrow{Y_2} = \overrightarrow{Z_2} \wedge \overrightarrow{X_2}$

On repère $(R_2)/(R_1)$ par $\Theta = (\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2})$

A $(S_3)$ on lie $(R_3)$ : $(O_3, \overrightarrow{X_3}, \overrightarrow{Y_3}, \overrightarrow{Z_3})$

$O_3$ centre de la roue $(S_3)$

$\overrightarrow{Y_3} = \overrightarrow{Y_2}$

$\overrightarrow{X_3}$ arbitraire

$\overrightarrow{Z_3} = \overrightarrow{X_3} \wedge \overrightarrow{Y_3}$

On repère la rotation de $(S_3)/(S_2)$ par $\phi = (\overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{X_3})$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Les caractéristiques d'inertie des solides $(S_1)$, $(S_2)$, $(S_3)$ sont les suivantes :

| | Masse | Tenseur d'inertie |
|---|---|---|
| $(S_1)$ | $M_1$ | donnée pas nécessaire au problème |
| $(S_2)$ | $M_2$ | $\overline{\overline{I}}_{G_2} = \begin{bmatrix} A_2 & -F_2 & -E_2 \\ -F_2 & B_2 & -D_2 \\ -E_2 & -D_2 & C_2 \end{bmatrix}_{R_2} \quad \overrightarrow{O_2G_2} = -a\,\overrightarrow{X_2}$ |
| $(S_3)$ | $M_3$ | $\overline{\overline{I}}_{O_3} = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}_{R_3}$ |

Calculez l'énergie cinétique de l'ensemble $(S_1, S_2, S_3)$

$$T^\circ = T_1^\circ + T_2^\circ + T_3^\circ$$

a) $$T_1 = \frac{1}{2} M_1 \left(\overrightarrow{V^\circ_{G_1}}\right)^2$$

$$\overrightarrow{V^\circ_{(G_1)}} = V\,\overrightarrow{X_0} + \overrightarrow{y'Y_0}$$

$$T_1 = \frac{1}{2} M_1 \left(V^2 + y'^2\right)$$

b) $$T_2 = \frac{1}{2} M_2 \left(\overrightarrow{V^\circ_{(G_2)}}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\Omega_2^\circ\,\overline{\overline{I}}_G\,\overrightarrow{\Omega_2^\circ}$$

$$\overrightarrow{V^\circ_{(G)}} = \begin{bmatrix} v\cos\Theta + y'\sin\Theta \\ -v\sin\Theta + y'\cos\Theta - a\Theta' \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2}$$

$\vec{V}_2^\circ\,(O_3)$ formule obtenue en remplaçant 1 par a dans la formule donnant

$$\overrightarrow{\Omega_2^\circ}\;\overline{\overline{I}}_{C_2}\,\overrightarrow{\Omega_2^\circ} = \left[0,0,\Theta'\right] \begin{bmatrix} A_2 & -F_2 & -E_2 \\ -F_2 & B_2 & -D_2 \\ -E_2 & -D_2 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Theta' \end{bmatrix}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$$T_2 = \frac{1}{2} M_2 \left[ X^2 + y'^2 - 2a\, y'\, \Theta' \cos \Theta + 2a\, v \sin \Theta\, \Theta' + a^2 \Theta'^2 \right] + \frac{1}{2} C_2 \Theta'^2$$

c) $$T_3 = \frac{1}{2} M_3 \left( \overrightarrow{V^{\circ}_{(O_3)}} \right)^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega^{\circ}_3}\ \overline{\overline{I}}_{O_3}\ \overrightarrow{\Omega^{\circ}_s}$$

$$\overrightarrow{\Omega^{\circ}_3}\ \overline{\overline{I}}_{O_3}\ \overrightarrow{\Omega^{\circ}_3} = \left[0,\ \phi',\ \Theta'\right] \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \phi' \\ \Theta' \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \frac{1}{2} M_3 \left[ v^2 + y'^2 - 2l y' \Theta' \cos\Theta + 2l v \sin\Theta\, \Theta' + l^2 \Theta'^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ B_3 \phi'^2 + A_3 \Theta'^2 \right]$$

finalement

$$T^{\circ} = \frac{1}{2} \left[ (M_3 + M_2 + M_1)\, V^2 + (M_3 + M_2 + M_1)\, y'^2 + (M_2 a^2 + M_3 l^2 + C_2 + A_3) \Theta'^2 \right.$$
$$\left. - 2\, (M_2 a + M_3 l) \cos \Theta\, y'\, \Theta' + 2\, (M_2 a + M_3 l)\, V\, \Theta' \sin \Theta \right]$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

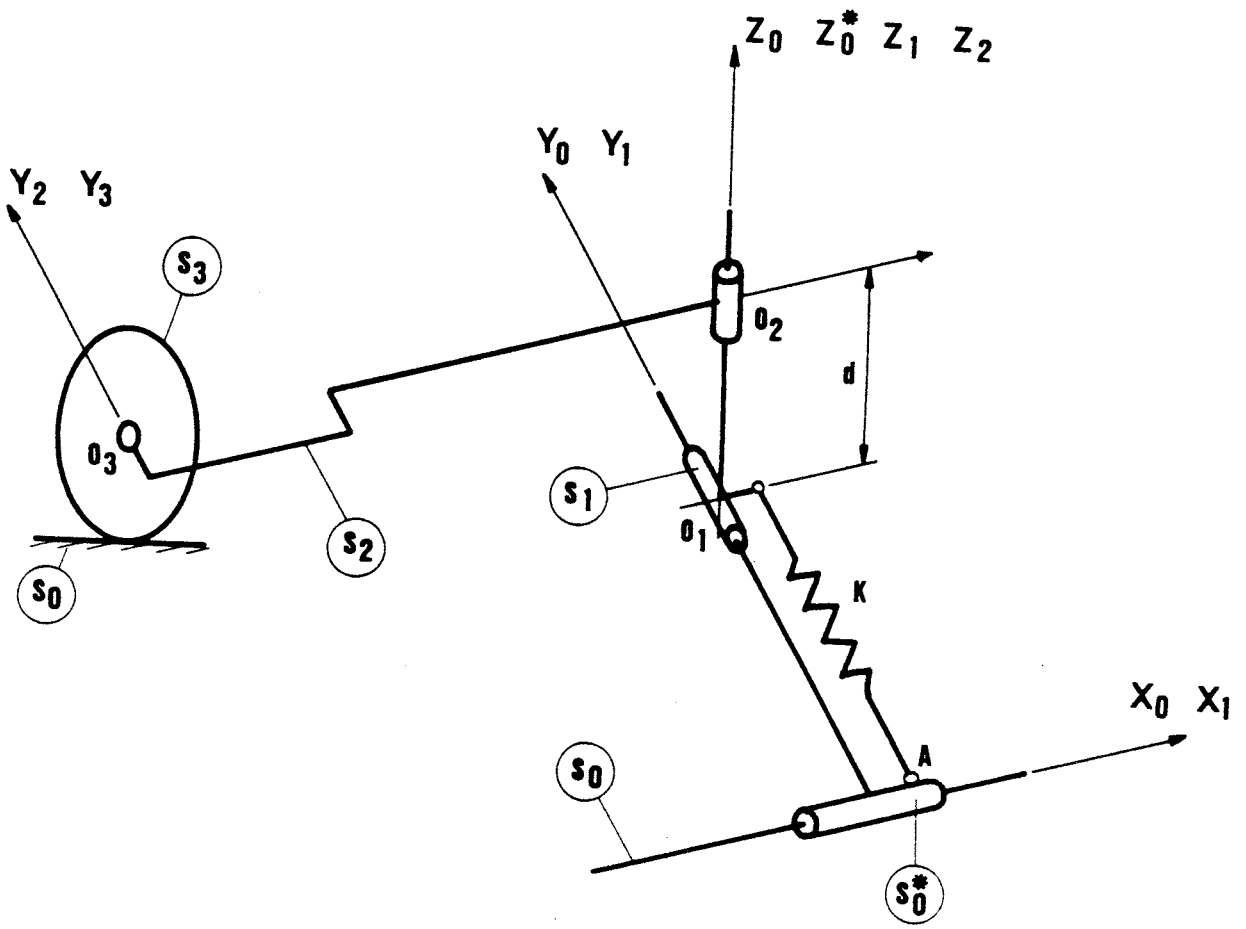



FIG 5-13

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

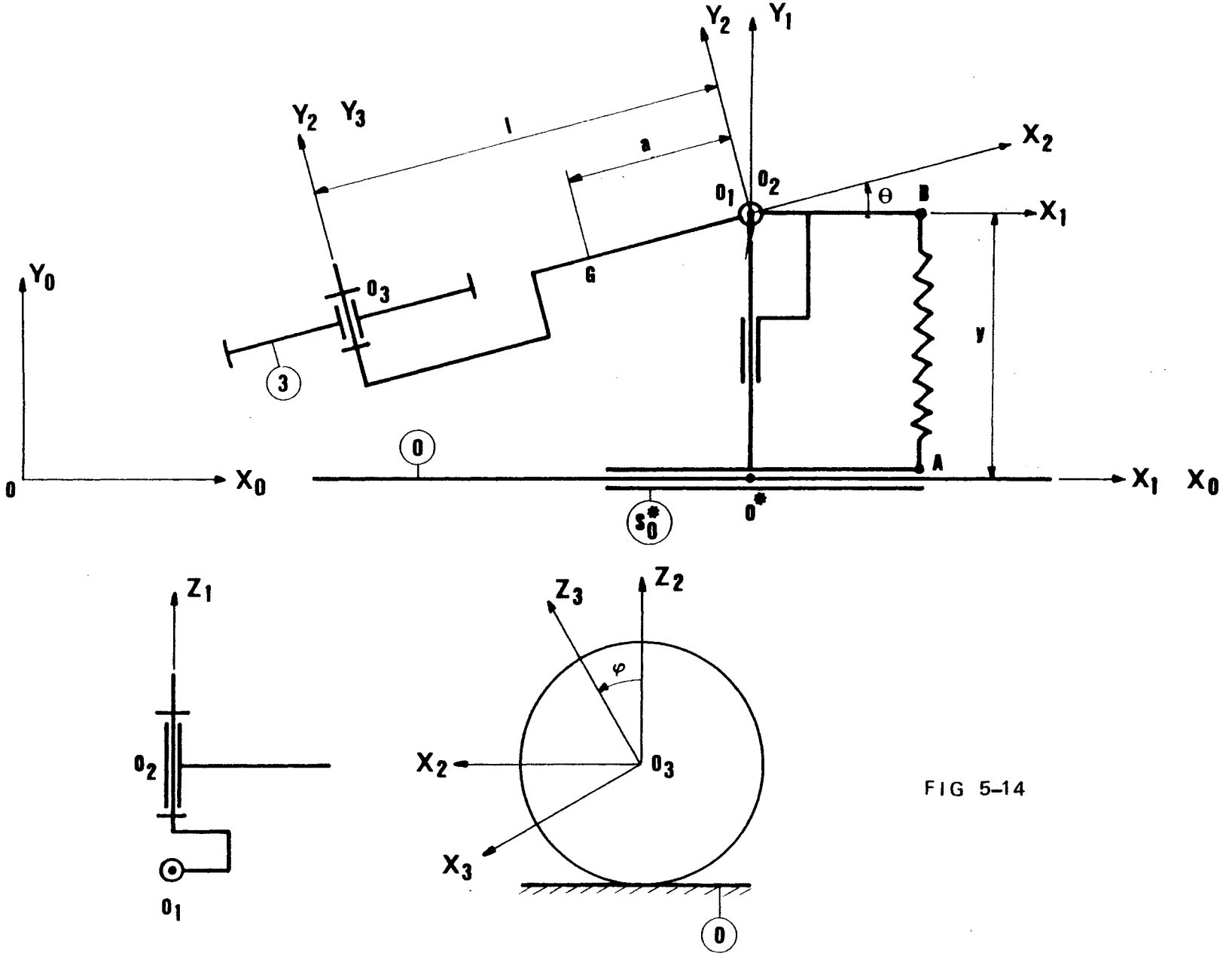



FIG 5-14



© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.