INTRODUCTION

Nous avons réuni dans ce fascicule, un certain nombre de problèmes concernant les chapitres 3, 4 et 5.

Dans le chapitre 3, sur les tenseurs cartésiens d'ordre 2, à la suite d'exercices simples de manipulation de la notation indicielle, des problèmes concrets de mécanique ont été choisis pour bien montrer le caractère physique de la notion de tenseur.

Dans le chapitre 4, les problèmes de géométrie des masses, au lieu d'être de simples exercices de calculs de moment d'inertie, permettent de se familiariser avec les propriétés importantes du tenseur d'inertie.

Les problèmes du chapitre 5 concernent le calcul des éléments de cinétique qui seront nécessaires à l'étude ultérieure du mouvement de mécanismes réels.

-=-=-=-=-=-

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

SOMMAIRE

- PROBLEMES SUR LE CHAPITRE 3 p. 1

3-1 Calcul indiciel 2
3-2 Tenseurs 7
3-3 Tenseurs 11
3-4 Intégrale vectorielle 15
3-5 Cinématique des milieux continus 20
3-6 Le symbole "Densité de Levi-Cavita" ou l'Alternateur 34

- PROBLEMES SUR LE CHAPITRE 4 p. 37

4-1 Exercices sur le tenseur d'inertie 38
4-2 Tenseur d'inertie d'un solide de révolution 43
4-3 Tenseur d'inertie d'un cylindre à base quelconque 46
4-4 Tenseur d'inertie d'un disque en rotation 49
4-5 Changement de base pour le tenseur d'inertie 53
4.6 Parallélépipède rectangle - Changement de base pour le tenseur d'inertie 55
4-7 Directions principales pour le tenseur d'inertie 60
4-8 Tenseur d'inertie d'une plaque semi-circulaire 72
4-9 Tenseur d'inertie I_O et I_G d'un cône 75
4-10 Tenseur d'inertie d'un cône creux 79

- PROBLEMES SUR LE CHAPITRE 5 p. 84

5-1 Dispositif expérimental pour mesurer les effets gyroscopiques 85
5-2 Eléments de cinétique du pendule gyroscopique de Sire 92
5-3 Eléments de cinétique de la balance gyroscopique de Kelvin 100
5-4 Element de cinétique d'une sphère sur un plan 106
5-5 Energie cinétique d'un volant excentré 113
5-6 Energie cinétique d'un pendule à deux barres 117

-=-=-=-=-

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

PROBLEMES

sur le

CHAPITRE 5

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Problème 5-1

Dispositif expérimental pour mesurer les effets gyroscopiques

5-1-1 ENONCE

Le système est composé de 4 solides(S_0),(S_1),(S_2), (S_3) disposés comme l'indique la figure .

(S_0) est un plan horizontal muni d'une tige vertical

(S_1) est une articulation rotoïde parfaite en K,de masse négligeable

(S_2) est une fourchette articulée sans frottement sur(S_1),de masse négligeable

(S_3) est un corps de révolution homogène de masse m, de rayon R,d'épaisseur e ,articulé sur (S_2) en G et reposant sur le plan (S_0) en M

Pour étudier ce système,on fait le repérage suivant.

- $A(S_0)$ on lie le repère R_0 : $\left[0, X_0, Y_0, Z_0\right]$
  tel que:
  $\vec{Z}_0$ vertical ascendant porté par l'axe de la tige
  $\vec{X}_0$ arbitraire
  $\vec{Y}_0 = \vec{Z}_0 \wedge \vec{X}_0$
- $A(S_1)$ on lie le repère R_1 : $\left[K, X_1, Y_1, Z_1\right]$
  tel que:
  $\vec{Z}_1 = \vec{Z}_0$
  $\vec{X}_1$ porté par l'axe de S_1
  $\vec{Y}_1 = \vec{Z}_1 \wedge \vec{X}_1$

On repère la rotation de (S_1)/ (S_0) par l'angle

$$\psi = (\vec{X}_0, \vec{X}_1)$$

- $A(S_2)$ on lie le repère R_2 : $\left[K, X_2, Y_2, Z_2\right]$
  tel que
  $\vec{Z}_2$ porté par l'axe de la fourchette
  $\vec{X}_2 = \vec{X}_1$
  $\vec{Y}_2 = \vec{Z}_2 \wedge \vec{X}_2$

Le repère R_2 fait un angle θ avec le repère R_1 tel que

$$\theta = (\vec{Z}_1, \vec{Z}_2)$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

- $A(S_3)$ on lie le repère R_3 : $\left[G, X_3, Y_3, Z_3\right]$ tel que

  $\vec{Z}_3 = \vec{Z}_2$

  $\vec{X}_3$ arbitraire

  $\vec{Y}_3 = \vec{Z}_3 \wedge \vec{X}_3$

  On repère la rotation de (S_3) / (S_2) par l'angle $\emptyset$ tel que

  $\emptyset = (\vec{X}_2, \vec{X}_3)$

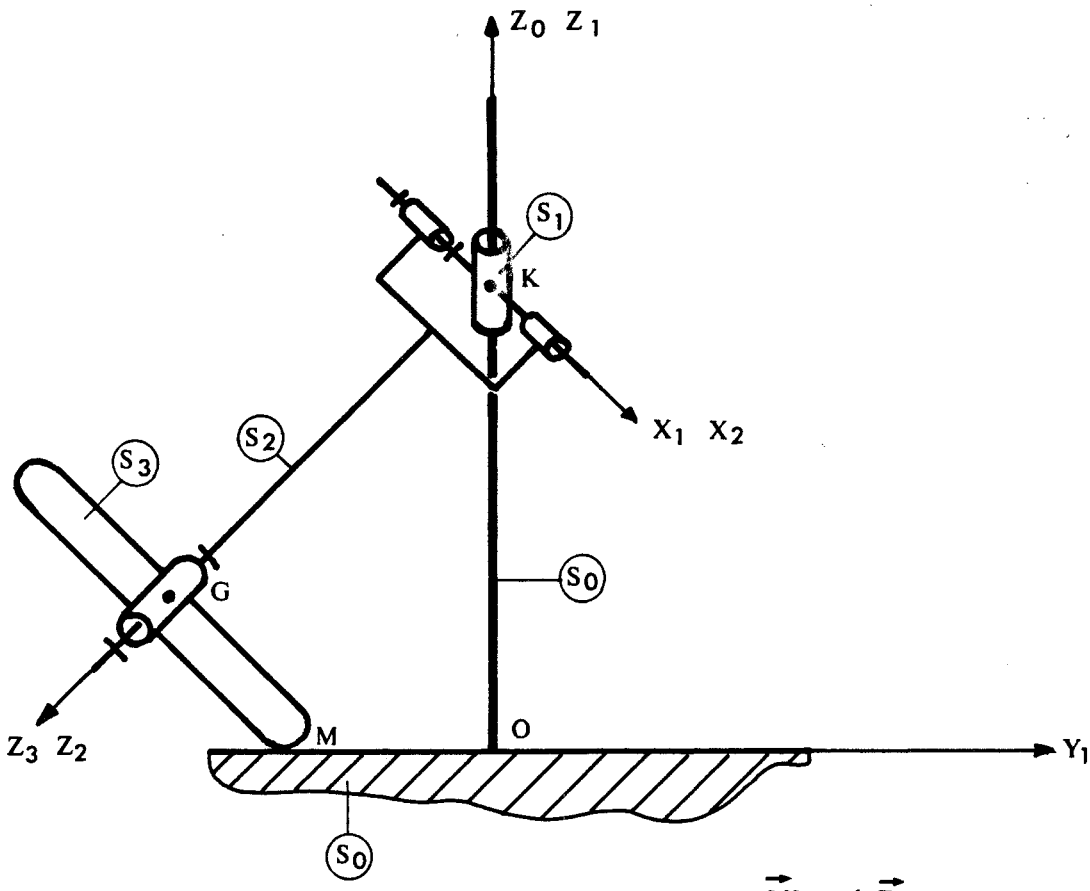
On demande :

1° Calculer le torseur cinétique au point K

2° Calculer le torseur dynamique en K

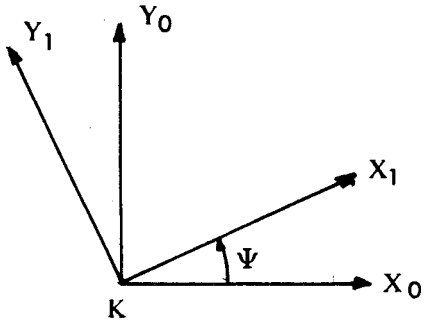
3° Calculer l'énergie cinétique du système .

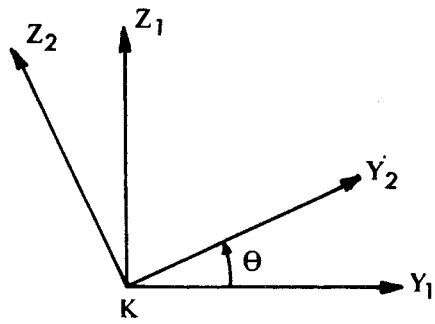
© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

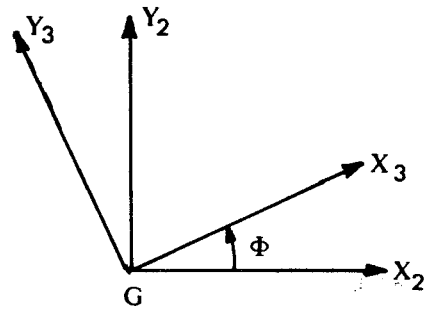


$\vec{OK} = h\,\vec{Z_0}$

$\vec{KG} = \ell\,\vec{Z_2}$







© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

5-1-2 SOLUTION

A) Torseur cinétique au point K dans R_0

1° *Somme cinétique* $\vec{\sigma}^0$:

$$\vec{\sigma}^0 = m\,\vec{V}^0(G)$$

$$\vec{V}^0(G) = \vec{V}^0(K) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{KG}$$

$$\vec{V}^0(K) = 0 \quad (\text{K} \in \text{l'axe de rotation de } R_1/R_0)$$

$$\vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0$$

$$\vec{\Omega}_2^1 = 0$$

$$\vec{\Omega}_1^0 = \Psi'\,\vec{Z}_1 = \Psi' \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\Theta \\ \cos\Theta \end{bmatrix}_{R_2}$$

$$\overrightarrow{KG} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{bmatrix}_{R_2}$$

d'où

$$\vec{V}^0(G) = \Psi' \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\Theta \\ \cos\Theta \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi'\,l\,\sin\Theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2}$$

On a donc

$$\vec{\sigma}^0 = \begin{bmatrix} m\,\Psi'\,l\,\sin\Theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2}$$

2° *Moment cinétique en K :* $\vec{\mu}^0(K)$:

$$\vec{\mu}^0(K) = \bar{\bar{I}}_G \cdot \vec{\Omega}_3^0 + \overrightarrow{KG} \wedge m\vec{V}^0(G)$$

$$\left[I_G \right] = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(3R^2+e^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(3R^2+e^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}_{R_2 (\text{ou } R_3)}$$

Si l'épaisseur e est négligeable devant le rayon R, on a

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$$\left[I_G \right] = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}_{R_2}$$

b)

$$\vec{\Omega}_3^0 = \vec{\Omega}_3^2 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0$$

$$\vec{\Omega}_3^0 = \phi'\vec{Z}_2 + 0 + \psi'\vec{Z}_1$$

$$\vec{\Omega}_3^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi'\sin\Theta \\ \psi'\cos\Theta + \phi' \end{bmatrix}_{R_2}$$

c)

$$\bar{\bar{I}}_G \cdot \vec{\Omega}_3^0 = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}_{R_2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \psi'\sin\Theta \\ \psi'\cos\Theta+\phi' \end{bmatrix}_{R_2}$$

$$\bar{\bar{I}}_G \cdot \vec{\Omega}_3^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{mR^2}{4}\psi'\sin\Theta \\ \frac{mR^2}{2}(\phi' + \psi'\cos\Theta) \end{bmatrix}_{R_2}$$

d)

$$\overrightarrow{KG} \wedge m\vec{V}^0(G) = m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{R_2} \wedge \begin{bmatrix} \psi' l\sin\Theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2} = m \begin{bmatrix} 0 \\ l^2\psi'\sin\Theta \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2}$$

e) on a donc finalement :

$$\vec{\mu}^0_{(K)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi'\sin\Theta\left(\frac{mR^2}{4} + l^2\right) \\ (\psi'\cos\Theta+\phi')\frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}_{R_2}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

B) Torseur dynamique en K dans R_0 du solide 3

1° *Somme dynamique* $\vec{\Sigma}^0$:

$$\vec{\Sigma}^0 = \frac{d^0}{dt}\vec{\sigma}^0$$

$$\vec{\Sigma}^0 = \frac{d^2}{dt}\vec{\sigma}^0 + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{\sigma}^0$$

$$\vec{\Sigma}^0 = \begin{bmatrix} m\Psi''l\sin\Theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi'\sin\Theta \\ \Psi'\cos\Theta \end{bmatrix}_{R_2} \wedge \begin{bmatrix} m\Psi'l\sin\Theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{\Sigma}^0 = \begin{bmatrix} m\Psi''l\sin\Theta \\ m\Psi'^2\sin\Theta\cos\Theta \\ -ml\Psi'^2\sin^2\Theta \end{bmatrix}_{R_2}$$

2° *Moment dynamique en K :* $\vec{\delta}^0(K)$:

$$\vec{\delta}^0(K) = \frac{d^0}{dt}\vec{\mu}^0(K) + m\vec{V}^0(G) \wedge \vec{V}^0(K)$$

mais $\vec{V}^0(K) = 0$

d'où

$$\vec{\delta}^0(K) = \frac{d^0}{dt}\vec{\mu}^0(K) = \frac{d^2}{dt}\vec{\mu}^0(K) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{\mu}^0(K)$$

$$\vec{\delta}^0(K) = \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi''\sin\Theta(\frac{mR^2}{4} + l^2) \\ (\Psi''\cos\Theta + \emptyset'')\frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}_{R_2} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi'\sin\Theta \\ \Psi'\cos\Theta \end{bmatrix}_{R_2} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi'\sin\Theta(\frac{mR^2}{4} + l^2) \\ (\Psi'\cos\Theta + \emptyset')\frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{\delta}^0(K) = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2}\Psi'^2\sin\Theta\cos\Theta + \frac{mR^2}{2}\emptyset'\Psi'\sin\Theta - \Psi'^2\sin\Theta\cos\Theta(\frac{mR^2}{4} + l^2) \\ \Psi''\sin\Theta(\frac{mR^2}{4} + l^2) \\ (\Psi''\cos\Theta + \emptyset'')\frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{\delta}^0(K) = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4}\Psi'^2\sin\Theta\cos\Theta - l^2\Psi'^2\sin\Theta\cos\Theta + \frac{mR^2}{2}\emptyset'\Psi'\sin\Theta \\ \Psi''\sin\Theta(\frac{mR^2}{4} + l^2) \\ (\Psi''\cos\Theta + \emptyset'')\frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}_{R_2}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$$\vec{\delta}^0(K) = \begin{bmatrix} \Psi'^2 \sin\Theta\cos\Theta\left(\frac{mR^2}{4} - l^2\right) + \frac{mR^2}{2}\,\phi'\Psi'\sin\Theta \\ \Psi''\sin\Theta\left(\frac{mR^2}{4} + l^2\right) \\ (\Psi''\cos\Theta + \phi'')\,\frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}_{R_2}$$

C) <u>Energie cinétique</u>

$$T^0 = \frac{1}{2}\, m\vec{V}^0(G)^2 + \frac{1}{2}\,\vec{\Omega}_3^0\,\bar{\bar{I}}_G \cdot \vec{\Omega}_3^0$$

Tous les éléments de cette expression ont été calculés précédemment

$$\frac{1}{2}\, m\, \vec{V}^0(G)^2 = \frac{1}{2}\, m\left[l^2\Psi'^2\sin^2\Theta \right]$$

$$\frac{1}{2}\,\vec{\Omega}_3^0 \cdot \bar{\bar{I}}_G \cdot \vec{\Omega}_3^0 = \frac{1}{2}\left[0,\ \Psi'\sin\Theta,\ \Psi'\cos\Theta + \phi' \right]_{R_2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}_{R_2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi'\sin\Theta \\ \Psi'\cos\Theta + \phi' \end{bmatrix}_{R_2}$$

$$\frac{1}{2}\,\vec{\Omega}_3^0 \cdot \bar{\bar{I}}_G \cdot \vec{\Omega}_3^0 = \frac{1}{2}\left[\frac{mR^2}{4}\,\Psi'^2\sin^2\Theta + \frac{mR^2}{2}\,(\Psi'\cos\Theta + \phi')^2 \right]$$

d'où finalement

$$T^0 = \frac{1}{2}\, m\left[\left(\frac{R^2}{4} + l^2\right)\Psi'^2\sin^2\Theta + \frac{R^2}{2}\,(\Psi'\cos\Theta + \phi')^2 \right]$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Problème 5-2

Eléments de cinétique -Pendule gyroscopique de Sire

5-2-1 ENONCE

Un système est composé de 4 solides parfaits (S_0), (S_1), (S_2), (S_3), tous reliés par des articulations rotoïdes parfaites.

L'axe de liaison (S_1) / (S_2) est orthogonal aux axes des liaisons $(S_1)/(S_0)$ et $(S_3)/(S_2)$.

Dans la suite du problème on considère que les solides (S_1) et (S_2) ont une masse négligeable.

$A(S_0)$ on lie R_0 : $\left[0, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0\right]$ tel que

$\vec{Z}_0$ vertical ascendant porté par l'axe de liaison $(S_1)/(S_0)$

$\vec{Y}_0$ arbitraire

$\vec{Z}_0 = \vec{X}_0 \wedge \vec{Y}_0$

$A(S_1)$ on lie R_1 : $\left[0_1, \vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1\right]$. $(0_1 \equiv 0)$ tel que

$\vec{Z}_1 = \vec{Z}_0$

$\vec{Y}_1$ de même direction que l'axe de la liaison $(S_2)/(S_1)$ et de sens arbitraire

$\vec{X}_1 = \vec{Y}_1 \wedge \vec{Z}_1$

On repère $(R_1)/(R_0)$ par $\Psi = (\vec{X}_0, \vec{X}_1)$

$A(S_2)$ on lie R_2 : $\left[0_2, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2\right]$ tel que

$\overrightarrow{0_1 0_2} = a\,\vec{X}_1 + c\,\vec{Z}_1$ ($a > 0$, $c > 0$)

$\vec{Y}_2 = \vec{Y}_1$

$\vec{X}_2$ de même direction que l'axe de la liaison $(S_3)/(S_2)$ et de sens arbitraire

$\vec{Z}_2 = \vec{X}_2 \wedge \vec{Y}_2$.

On repère $(S_2)/(S_1)$ par $\Theta = (\vec{Z}_1, \vec{Z}_2)$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$A(S_3)$ on lie (R_3): $\left[O_3, \vec{X}_3, \vec{Y}_3; \vec{Z}_3 \right]$ $(O_2\vec{O}_3 = -l_3 \vec{Z}_2)$

tel que

$\vec{X}_3 = \vec{X}_2$

$\vec{Y}_3$ arbitraire

$\vec{Z}_3 = \vec{X}_3 \wedge \vec{Y}_3$

On repère la rotation de $(R_3)/(R_2)$ par $\Phi = (\vec{Y}_2, \vec{Y}_3)$

Le solide (S_3) de masse M a pour centre d'inertie O_3 et son tenseur d'inertie est :

$$\left[I_{O_3} \right]_{S_3} = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{R_3}$$

avec $B_3 = C_3$

++++++++++++++++++

1°) Calculer le torseur cinétique en O_3 pour le système.

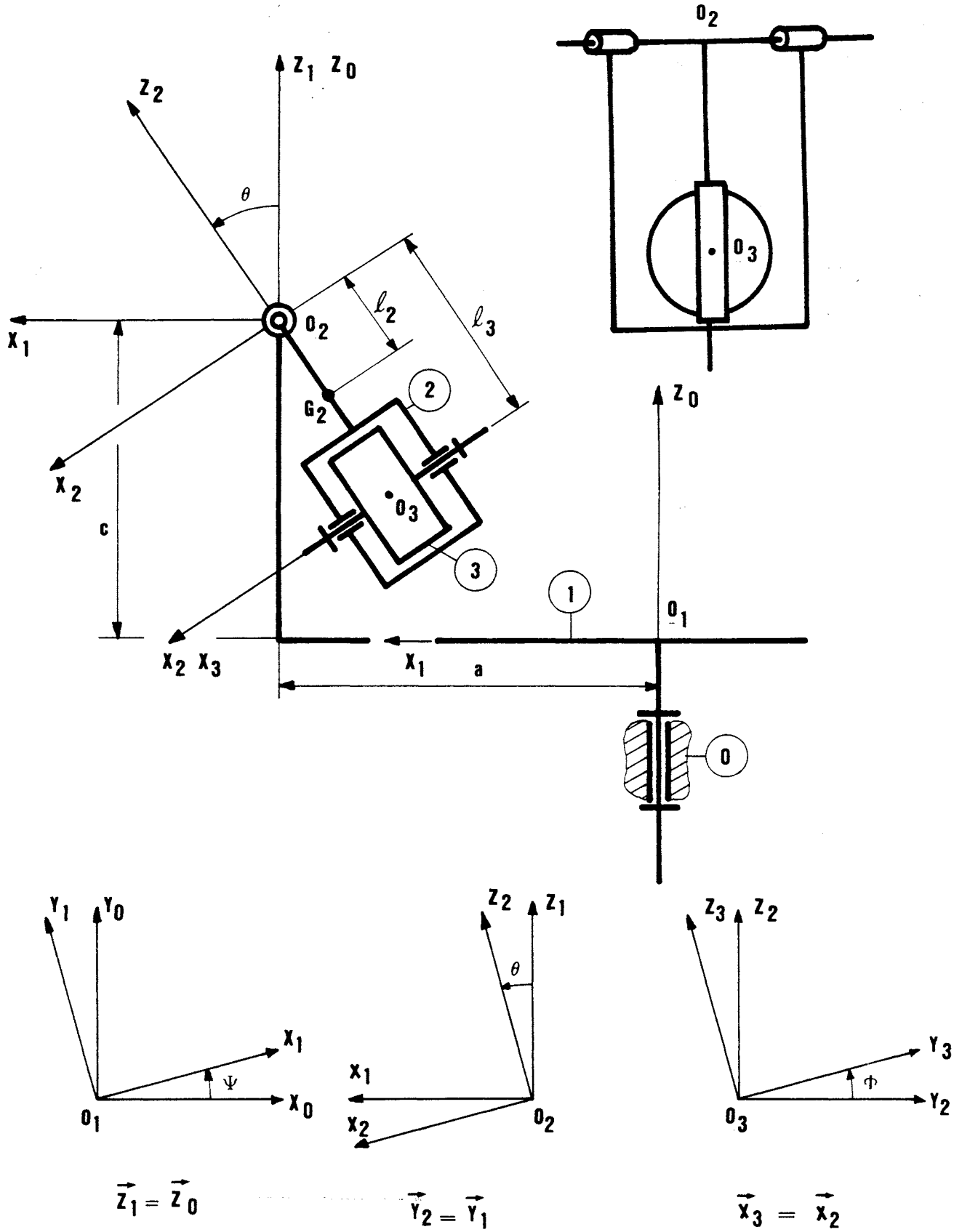
2°) Calculer le moment cinétique en O_1 pour le système.

3°) Calculer le torseur dynamique en O_3 pour le système.

4°) Calculer le moment dynamique en O_1 pour le système.

5°) Calculer l'énergie cinétique du système .

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.



$\vec{Z}_1 = \vec{Z}_0$ $\vec{Y}_2 = \vec{Y}_1$ $\vec{X}_3 = \vec{X}_2$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

5-2-2 **SOLUTION**

A) Calcul du torseur cinétique en O_3 pour le système

1°) Somme cinétique : $\vec{\sigma}^0$:

$$\vec{\sigma}^0 = M\,\vec{V}^0(O_3) \qquad \text{car } O_3 \equiv G$$

$$\vec{V}^0(O_3) = \vec{V}^0(O_2) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{O_2O_3}$$

$$\vec{V}^0(O_2) = \vec{V}^0(O_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1O_2}$$

$$\vec{V}^0(O_1) = 0$$

$$\vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1O_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi' \end{bmatrix}_{R_1} \wedge \begin{bmatrix} +a \\ 0 \\ +C \end{bmatrix}_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ +a\Psi' \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1,R_2}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{O_2O_3} = (\vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0) \wedge \overrightarrow{O_2O_3}$$

$$\vec{\Omega}_2^1 = \Theta'\,\vec{Y}_2$$

$$\vec{\Omega}_1^0 = \Psi'\,\vec{Z}_1 = \Psi'\,(-\sin\Theta\vec{X}_2 + \cos\Theta\vec{Z}_2)$$

d'où

$$\vec{\Omega}_2^0 = \begin{bmatrix} -\Psi'\sin\Theta \\ \theta' \\ \Psi'\cos\Theta \end{bmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{O_2O_3} = \begin{bmatrix} -\Psi'\sin\Theta \\ \Theta' \\ \Psi'\cos\Theta \end{bmatrix}_{R_2} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_3 \end{bmatrix}_{R_2} = \begin{bmatrix} -l_3\Theta' \\ -l_3\Psi'\sin\Theta \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2}$$

donc finalement

$$\vec{V}^0(O_3) = \begin{bmatrix} -l_3\Theta' \\ (a - l_3\sin\Theta)\Psi' \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2}$$

et donc

$$\vec{\sigma}^0 = \begin{bmatrix} -Ml_3\Theta' \\ M(a - l_3\sin\Theta)\Psi' \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

2°) *Moment cinétique en O_3 :*

$$\vec{\mu}^0(O_3) = \bar{\bar{I}}_{O_3} \cdot \vec{\Omega}_3^0 \qquad (O_3 \equiv G)$$

$$\vec{\Omega}_3^0 = \vec{\Omega}_3^2 + \vec{\Omega}_2^0$$

$$\vec{\Omega}_3^0 = \begin{bmatrix} \Phi' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2} + \begin{bmatrix} -\Psi'\sin\Theta \\ \Theta' \\ \Psi'\cos\Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi'-\Psi'\sin\Theta \\ \Theta' \\ \Psi'\cos\Theta \end{bmatrix}_{R_2}$$

$$\bar{\bar{I}}_{O_3} = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{R_3,R_2} \qquad B_3 = C_3$$

(corps de révolution autour de $\vec{X}_3 = \vec{X}_2$)

donc

$$\vec{\mu}^0(O_3) = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{bmatrix}_{R_2} \cdot \begin{bmatrix} \Phi'-\Psi'\sin\Theta \\ \Theta' \\ \Psi'\cos\Theta \end{bmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{\mu}^0(O_3) = \begin{bmatrix} A_3(\Phi' - \Psi'\sin\Theta) \\ B_3\,\Theta' \\ B_3\,\Psi'\cos\Theta \end{bmatrix}_{R_2}$$

B) Calcul du moment cinétique en O_1 pour le système :

$$\vec{\mu}^0(O_1) = \vec{\mu}^0(O_3) + \vec{\sigma}^0 \wedge \overrightarrow{O_3O_1}$$

$$\overrightarrow{O_3O_1} = \overrightarrow{O_3O_2} + \overrightarrow{O_2O_1} = \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ -C \end{bmatrix}_{R_1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +l_3 \end{bmatrix}_{R_2}$$

$$= \begin{bmatrix} -a\cos\Theta + C\sin\Theta \\ 0 \\ -a\sin\Theta - C\cos\Theta + l_3 \end{bmatrix}_{R_2}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$$\vec{\sigma}^0 \wedge \overrightarrow{O_3O_1} = \begin{bmatrix} -Ml_3\Theta' \\ M(a-l_3\sin\Theta)\Psi' \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2} \wedge \begin{bmatrix} -a\cos\Theta+C\sin\Theta \\ 0 \\ -a\sin\Theta-C\cos\Theta+l_3 \end{bmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{\sigma}^0 \wedge \overrightarrow{O_3O_1} = \begin{bmatrix} -M\Psi'(a-l_3\sin\Theta)(a\sin\Theta+C\cos\Theta-L_3) \\ -Ml_3\Theta'(a\sin\Theta+C\cos\Theta-l_3) \\ M\Psi'(a-l_3\sin\Theta)(a\cos\Theta-C\sin\Theta) \end{bmatrix}_{R_2}$$

On obtient donc

$$\vec{\mu}^0(O_1) = \begin{bmatrix} A_3(\Phi'-\Psi'\sin\Theta)-M\Psi'(a-l_3\sin\Theta)(a\sin\Theta+C\cos\Theta-l_3) \\ B_3\Theta'-Ml_3\Theta'(a\sin\Theta+C\cos\Theta-l_3) \\ B_3\Psi'\cos\Theta+M\Psi'(a-l_3\sin\Theta)(a\cos\Theta-C\sin\Theta) \end{bmatrix}_{R_2}$$

C) <u>Calculer le torseur dynamique en O_3 pour le système</u>

1° *<u>Somme dynamique $\vec{\Sigma}^0$</u>* :

$$\vec{\Sigma}^0 = \frac{d^0}{dt}\vec{\sigma}^0 = \frac{d^2}{dt}\vec{\sigma}^0 + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{\sigma}^0$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{\sigma}^0 = \begin{bmatrix} -\Psi'\sin\Theta \\ \Theta' \\ \Psi'\cos\Theta \end{bmatrix}_{R_2} \wedge \begin{bmatrix} -Ml_3\sin\Theta \\ M(a-l_3\sin\Theta)\Psi' \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{\sigma}^0 = \begin{bmatrix} -M\Psi'^2\cos\theta(a-l_3\sin\theta) \\ -Ml_3\Psi'\Theta'\cos\Theta \\ -M\Psi'^2\sin\Theta(a-l_3\sin\Theta)+Ml_3\Theta'^2 \end{bmatrix}_{R_2}$$

et donc

$$\vec{\Sigma}^0 = \begin{bmatrix} -Ml_3\Theta'' - M\Psi'^2\cos\Theta(a-l_3\sin\Theta) \\ M(a-l_3\sin\Theta)\Psi'' - 2Ml_3\Psi'\Theta'\cos\Theta \\ -M\Psi'^2\sin\Theta(a-l_3\sin\Theta)+Ml_3\Theta'^2 \end{bmatrix}_{R_2}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

2°) *Moment dynamique en O_3:*

$$\vec{\delta}^0(O_3) = \frac{d^0}{dt}\vec{\mu}^0(O_3) = \frac{d^2}{dt}\vec{\mu}^0(O_3) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{\mu}^0(O_3)$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{\mu}^0(O_3) = \begin{bmatrix} -\Psi'\sin\Theta \\ \Theta' \\ \Psi'\cos\Theta \end{bmatrix}_{R_2} \wedge \begin{bmatrix} A_3(\Phi'-\Psi'\sin\Theta) \\ B_3\Theta' \\ B_3\Psi'\cos\Theta \end{bmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{\mu}^0(O_3) = \begin{bmatrix} B_3\Theta'\Psi'\cos\Theta - B_3\Theta'\Psi'\cos\Theta \\ A_3\Psi'\cos\Theta(\Phi'-\Psi'\sin\Theta) + B_3\Psi'^2\sin\Theta\cos\Theta \\ -B_3\Psi'\Theta'\sin\Theta - A_3\Theta'(\Phi'-\Psi'\sin\Theta) \end{bmatrix}_{R_2}$$

et donc

$$\vec{\delta}^0(O_3) = \begin{bmatrix} A_3(\Phi''-\Psi''\sin\Theta-\Psi'\Theta'\cos\Theta) \\ B_3\Theta''+A_3\Psi'\cos\Theta(\Phi'-\Psi'\sin\Theta)+B_3\Psi'^2\sin\Theta\cos\Theta \\ B_3\Psi''\cos\Theta-2B_3\Psi'\Theta'\sin\Theta-A_3\Theta'(\Phi'-\Psi'\sin\Theta) \end{bmatrix}_{R_2}$$

D) Calcul du moment dynamique en O_1 pour le système

1°) *1ère Méthode :*

$$\vec{\delta}^0(O_1) = \frac{d^0}{dt}\vec{\mu}^0(O_1) \qquad \text{car } \vec{V}^0(O_1) = 0$$

$$\vec{\delta}^0(O_1) = \frac{d^2}{dt}\vec{\mu}^0(O_1) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{\mu}^0(O_1)$$

On connait $\vec{\mu}^0(O_1)$ exprimé dans R_2 . Il suffit de dériver ses composantes pour avoir $\frac{d^2}{dt}\vec{\mu}^0(O_1)$

$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{\mu}^0(O_1)$ peut être calculé facilement dans R_2 et on aura

$\vec{\delta}^0(O_1)$ = la somme des deux expressions sur R_2

2°) *2éme Méthode :*

$$\vec{\delta}^0(O_1) = \vec{\delta}^0(O_3) + \vec{\Sigma}^0 \wedge \overrightarrow{O_3O_1}$$

$$\overrightarrow{O_3O_1} = \begin{bmatrix} -a\cos\Theta+C\sin\Theta \\ 0 \\ -a\sin\Theta-C\cos\Theta-l_3 \end{bmatrix}_{R_2}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{\delta}^{0}(O_3) & \text{connu sur } R_2 \\ \vec{\Sigma}^{0} & \text{connu sur } R_2 \\ \overrightarrow{O_3O_1} & \text{connu sur } R_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{\delta}^{0}(O_1) \text{ sera connu sur } R_2$$

E) <u>Energie cinétique du système</u>

$$T^0 = T^0_{(S_3)}$$

$$T^0 = \frac{1}{2}\,\vec{\Omega}^0_3\,\bar{\bar{I}}_{O_3}\,\vec{\Omega}^0_3 + \frac{1}{2}\,M\left[\vec{V}^0(O_3)\right]^2$$

$$\vec{V}^0(O_3) = \begin{bmatrix} -l_3\Theta' \\ (a-l_3\sin\Theta)\Psi' \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2} \quad \text{calculé précédemment}$$

$$\vec{\Omega}^0_3 = \begin{bmatrix} \Phi'-\Psi'\sin\Theta \\ \Theta' \\ \Psi'\cos\Theta \end{bmatrix}_{R_2} \quad \text{calculé précédemment}$$

$$T^0 = \frac{1}{2}\left[A_3(\Phi'-\Psi'\sin\Theta)^2+B_3(\Theta'^2+\Psi'^2\cos^2\Theta) + M(l_3^2\Theta'^2 +(a-l_3\sin\Theta)^2\right]$$

$$T^0 = \frac{1}{2}\left[A_3(\Phi'-\Psi'\sin\Theta)^2+B_3(\Theta'^2+\Psi'^2\cos^2\Theta) +M(l_3^2\Theta'^2+a^2\Psi'^2+l_3^2\sin^2\Theta\ \Psi'^2-2al_3\sin\Theta\ \Psi'^2)\right]$$

$$T^0 = \frac{1}{2}\left[A_3(\Phi'-\Psi'\sin\Theta)^2+B_3(\Theta'^2+\Psi'^2\cos^2\Theta)+M(l_3^2\ \Theta'^2+a^2\Psi'^2+l_3^2\sin^2\Theta\Psi'^2-2al_3\sin\Theta\ \Psi'^2)\right]$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Problème 5-3

Elément de cinétique de la balance gyrostatique de Kelvin

5-3-1 ENONCE

Un système est constitué de 6 solides (S_0), (S_1), (S_2) (S_3), (S_4), (S_5) disposés comme l'indique la figure 1 .

(S_0) est un solide formant le bâti de l'appareil. (S_1), (S_2), (S_3), (S_5) sont des barres qui sont liées de manière à demeurer toujours dans un même plan. (S_4) est un volant .

A(S_0) on lie le repère (R_0) : $\left[O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0\right]$. Le mouvement de $(S_1)/(S_0)$ est un mouvement de rotation autour de $(O, \vec{Z}_0)$.

A (S_1) on lie le repère (R_1) : $\left[O, \vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1\right]$:

$$\vec{Z}_1 = \vec{Z}_0$$

$$\vec{X}_1 \text{ arbitraire}$$

$$\vec{Y}_1 = \vec{Z}_1 \wedge \vec{X}_1$$

On repère la rotation de $(R_1)/(R_0)$ par :

$$\psi = (\vec{X}_0, \vec{X}_1)$$

(S_2) est une barre OB de longueur 2a. Le mouvement $(S_2)/(S_1)$ est un mouvement de rotation autour de $(B, \vec{Y}_1)$. A (S_2) on lie (R_2) : $\left[B, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2\right]$

$$\vec{Y}_2 = \vec{Y}_1$$

$$\vec{Z}_2 = \frac{\overrightarrow{OB}}{2a}$$

$$\vec{X}_2 = \vec{Y}_2 \wedge \vec{Z}_2$$

On repère la rotation de $(R_2)/(R_1)$ par

$$\theta = (\vec{Z}_1, \vec{Z}_2)$$

(S_3) est une barre homogène BA de longueur 2a. Le mouvement de $(S_3)/(S_2)$ est une rotation autour de l'axe $(B, \vec{Y}_2)$. D'autre part l'extrêmité A de BA est assujettie à se déplacer autour de $(O, \vec{Z}_0)$ étant reliée en ce point à la barre (S_5) qui a un mouvement de translation par rapport à (R_1).

A (S_5) on peut donc lier le repère (R'_1) : $\left[A, \vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1\right]$.

Le mouvement de (S_3) par rapport à (S_5) est une rotation autour de $\left[A, \vec{Y}_1\right]$. A (S_3) on lie le repère $\left[A, \vec{X}_3, \vec{Y}_3, \vec{Z}_3\right]$.

$$\vec{Y}_3 = \vec{Y}_1$$

$$\vec{X}_3 = \frac{\overrightarrow{AB}}{2a}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$$\vec{Z}_3 = \vec{X}_3 \wedge \vec{Y}_3$$

On repère la rotation de $(R_3)/(R'_1)$ par

$$\Theta_1 = \vec{Z}_1, \vec{Z}_3$$

On a immédiatement $\Theta_1 = (\frac{\Pi}{2} - \Theta)$. On éliminera Θ_1 en fonction de Θ chaque fois qu'il se présentera dans les calculs.

Le solide (S_4) est un volant en mouvement autour de la barre AB . A (S_4) on lie le repère (R_4) : $(G, \vec{X}_4, \vec{Y}_4, \vec{Z}_4)$

G milieu de AB

$$\vec{X}_4 = \vec{X}_3$$

$\vec{Y}_4$: arbitraire

$$\vec{Z}_4 = \vec{X}_4 \wedge \vec{Y}_4$$

On repère la rotation de $(R_4)/(R_3)$ par

$$\Phi = (\vec{Y}_3, \vec{Y}_4)$$

La masse de (S_4) est M_4 et son tenseur d'inertie $\bar{\bar{I}}_G$ est :

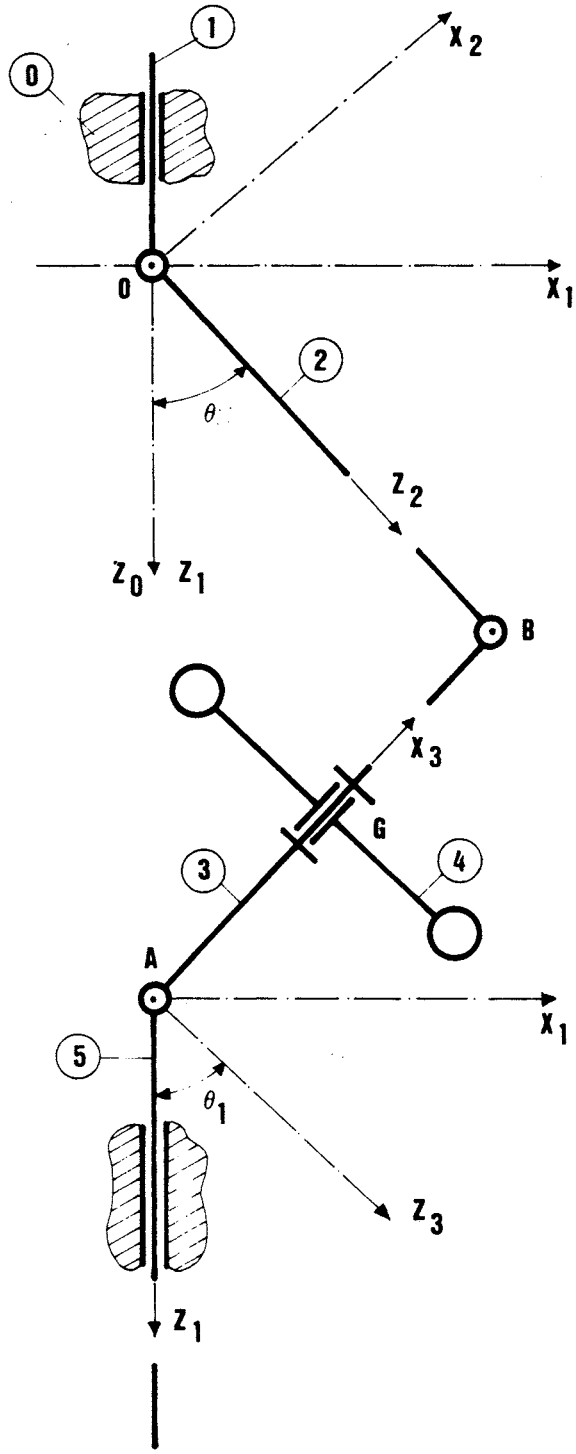
$$\bar{\bar{I}}_G = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & B_4 \end{bmatrix}_{R_4}$$

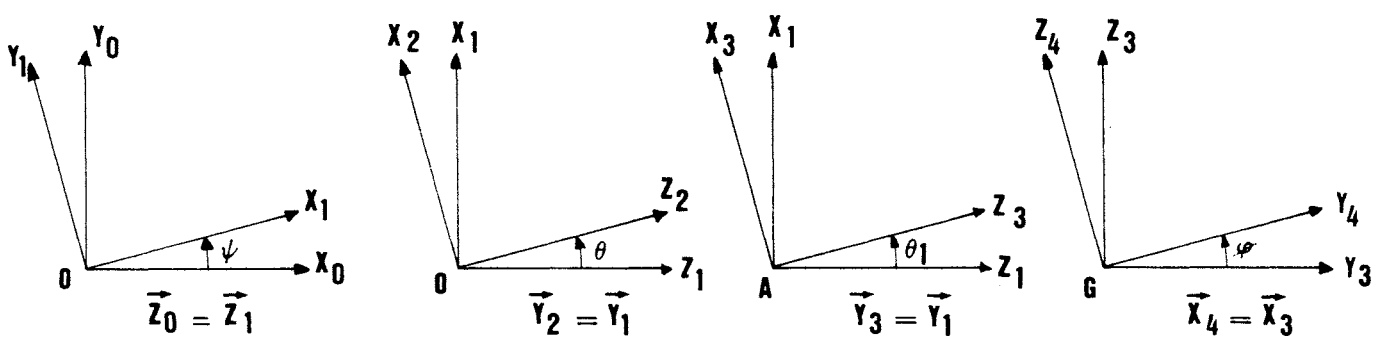
1°) Calculer le moment cinétique $\vec{\mu}^0(G)$ de (S_4).

2°) Calculer le moment dynamique $\vec{\delta}^0(G)$ de (S_4).

3°) Calculer l'énergie cinétique T^0 de (S_4).

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.





© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

5-3-2 SOLUTION

A) Calcul du moment cinétique $\vec{\mu}^0(G)$ de (S_4) :

Selon la définition du moment cinétique

$$\vec{\mu}^0(G) = \left[I_G \right] . \vec{\Omega}_4^0 \qquad (O_S \in G)$$

Le solide (S_4) étant de révolution

$$\left[I_G \right]_{R_4} = \left[I_G \right]_{R_3}$$

$$\left[I_G \right]_{R_3} = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & B_4 \end{bmatrix}_{R_3}$$

$$\vec{\Omega}_4^0 = \vec{\Omega}_4^3 + \vec{\Omega}_3^1 + \vec{\Omega}_1^0$$

$$\vec{\Omega}_4^0 = \Phi'\vec{X}_3 + \Theta_1'\vec{Y}_3 + \Psi'\vec{Z}_1$$

Nous savons que $\Theta_1 = \frac{\Pi}{2} - \Theta$

d'où $\Theta_1' = -\Theta'$

De plus $\vec{Z}_1 = -\vec{X}_3 \sin\Theta_1 + \vec{Z}_3 \cos\Theta_1$

$$\vec{Z}_1 = -\vec{X}_3 \cos\Theta + \vec{Z}_3 \sin\Theta$$

On a donc définitivement

$$\vec{\Omega}_4^0 = \begin{bmatrix} \Phi' - \Psi'\cos\Theta \\ -\Theta' \\ \Psi'\sin\Theta \end{bmatrix}_{R_3}$$

On a donc

$$\vec{\mu}_G^0 \; (S_4) = \begin{bmatrix} A_4(\Phi' - \Psi'\cos\Theta) \\ -B_4\Theta' \\ B_4\Psi'\sin\Theta \end{bmatrix}_{R_3}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

B) <u>Calcul du moment dynamique $\vec{\delta}^0(G)$ de (S_4)</u> :

Selon la définition du moment dynamique et puisque le point considéré est le centre d'inertie

$$\vec{\delta}^0(G) = \frac{d^0}{dt}\vec{\mu}^0(G) = \frac{d^3}{dt}\vec{\mu}^0(G) + \vec{\Omega}_3^0 \wedge \mu^0(G)$$

$$\frac{d^3}{dt}\vec{\mu}^0(G) = \begin{bmatrix} A_4(\phi'' - \psi''\cos\theta + \psi'\theta'\sin\theta) \\ -B_4\theta'' \\ B_4(\psi''\sin\theta + \psi'\theta'\cos\theta) \end{bmatrix}_{R_3}$$

$$\vec{\Omega}_3^0 = \begin{bmatrix} -\psi'\cos\theta \\ -\theta' \\ \psi'\sin\theta \end{bmatrix}_{R_3}$$

$$\vec{\Omega}_3^0 \wedge \vec{\mu}^0(G) = \begin{bmatrix} -\psi'\cos\theta \\ -\theta' \\ \psi'\sin\theta \end{bmatrix}_{R_3} \wedge \begin{bmatrix} A_4(\phi' - \psi'\cos\theta) \\ -B_4\theta' \\ B_4\psi'\sin\theta \end{bmatrix}_{R_3} = \begin{bmatrix} -B_4\psi'\theta'\sin\theta + B_4\psi'\theta'\sin\theta \\ A_4\psi'\sin\theta(\phi' + \psi'\cos\theta) + B_4\psi'^2\sin\theta\cos\theta \\ B_4\psi'\theta'\cos\theta + A_4\theta'(\phi' - \psi'\cos\theta) \end{bmatrix}_{R_3}$$

On obtient donc :

$$\vec{\delta}^0(G) = \begin{bmatrix} A_4(\phi'' - \psi''\cos\theta + \psi'\theta'\sin\theta) \\ -B_4\theta'' + \psi'^2\sin\theta\cos\theta(A_4 + B_4) + A_4\psi'\phi'\sin\theta \\ B_4(\psi''\sin\theta + \psi'\theta'\cos\theta) + \psi'\theta'\cos\theta(B_4 - A_4) \end{bmatrix}_{R_3}$$

C) <u>Calcul de l'énergie cinétique T^0 de (S_4)</u> :

$$T^0 = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_4^0 \cdot \bar{\bar{I}}_G \cdot \vec{\Omega}_4^0 + \frac{1}{2} M_4 \left[\vec{V}^0(G)\right]^2$$

$$T^0 = \underbrace{\qquad}_{T_1^0} + \underbrace{\qquad}_{T_2^0}$$

$$* \; T_1^0 = \frac{1}{2}\left[\phi' - \psi'\cos\theta,\ -\theta',\ \psi'\sin\theta\right]_{R_3} \cdot \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & B_4 \end{bmatrix}_{R_3} \cdot \begin{bmatrix} \phi' - \psi'\cos\theta \\ -\theta' \\ \psi'\sin\theta \end{bmatrix}_{R_3}$$

$$T_1^0 = \frac{1}{2}\left[A_4(\phi' - \psi'\cos\theta)^2 + B_4(\theta'^2 + \psi'^2\sin^2\theta)\right]$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$$\vec{V}^0(G) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}_3^0 \wedge \overrightarrow{AG}$$

$$\vec{V}^0(A) = \frac{d^0}{dt}\overrightarrow{OA} = \frac{d^0}{dt}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a\cos\Theta \end{bmatrix}_{R_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4a\Theta'\sin\Theta \end{bmatrix}_{R_0}$$

$$\vec{\Omega}_3^0 = \begin{bmatrix} -\Psi'\cos\Theta \\ -\Theta' \\ \Psi'\sin\Theta \end{bmatrix}_{R_3} \wedge \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ a\Psi'\sin\Theta \\ a\Theta' \end{bmatrix}_{R_3}$$

Exprimons $\vec{V}^0(A)$ dans R_3

$$\vec{V}^0(A) = -4a\Theta'\sin\Theta\vec{Z}_1 = \begin{bmatrix} 4a\Theta'\sin\Theta\cos\Theta \\ 0 \\ -4a\Theta'\sin^2\Theta \end{bmatrix}_{R_3}$$

Donc finalement

$$\vec{V}^0(G) = \begin{bmatrix} 4a\Theta'\sin\Theta\cos\Theta \\ a\Psi'\sin\Theta \\ a\Theta'\ (1-4\sin^2\Theta) \end{bmatrix}_{R_3}$$

et donc

$$\left[\vec{V}^0(G)\right]^2 = 16a^2\Theta'^2\sin^2\Theta\cos^2\Theta + a^2\ \Psi'^2\sin^2\Theta + a^2\Theta'^2\left[1+16\sin^4\Theta-8\sin^2\Theta\right]$$

$$\left[\vec{V}^0(G)\right]^2 = a^2\Psi'^2\sin^2\Theta + a^2\Theta'^2 + 8a^2\Theta'^2\sin^2\Theta$$

On a donc finalement

$$T_2^0 = \frac{a^2}{2} M_4\left[\sin^2\Theta(\Psi'^2 + 8\Theta'^2) + \Theta'^2\right]$$

et donc

$$T_0 = \frac{1}{2}\left[A_4(\Phi'-\Psi'\cos\Theta)^2 + B_4(\Theta'^2+\Psi'^2\sin^2\Theta) + a^2M_4\left[\sin^2\Theta(\Psi'^2+8\Theta'^2)+\Theta'^2\right]\right]$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Problème 5-4

Eléments de cinétique d'une sphère sur un plan

5-4-1 ENONCE

Une sphère (S) homogène de centre G, de masse m et de rayon a, roule sur un plan P .

On appelle I le point de contact de la sphère avec le plan.

Au plan P on lie le repère R_0 (O, $\vec{X}_0$, $\vec{Y}_0$, $\vec{Z}_0$) tel que

$\vec{Z}_0$ perpendiculaire au plan P

$\vec{X}_0$ arbitraire dans le plan P

$\vec{Y}_0 = \vec{Z}_0 \wedge \vec{X}_0$

A la sphère (S) on lie un repère R_S(G, $\vec{X}_S$, $\vec{Y}_S$, $\vec{Z}_S$) tel que

$$\overrightarrow{OG} \begin{bmatrix} x \\ y \\ a \end{bmatrix}_{R_0}$$

et tel que l'orientation de $(R_S)/(R_0)$ se fasse par les 3 angles d'Euler normaux Ψ, Θ, Φ.

On demande de :

1°) Calculer $\vec{V}_S^0(I)$ (vitesse d'un point de la sphère qui à l'instant t se trouve en I).

2 On notera :

$$\vec{\Omega}_S^0 = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_{R_0}$$

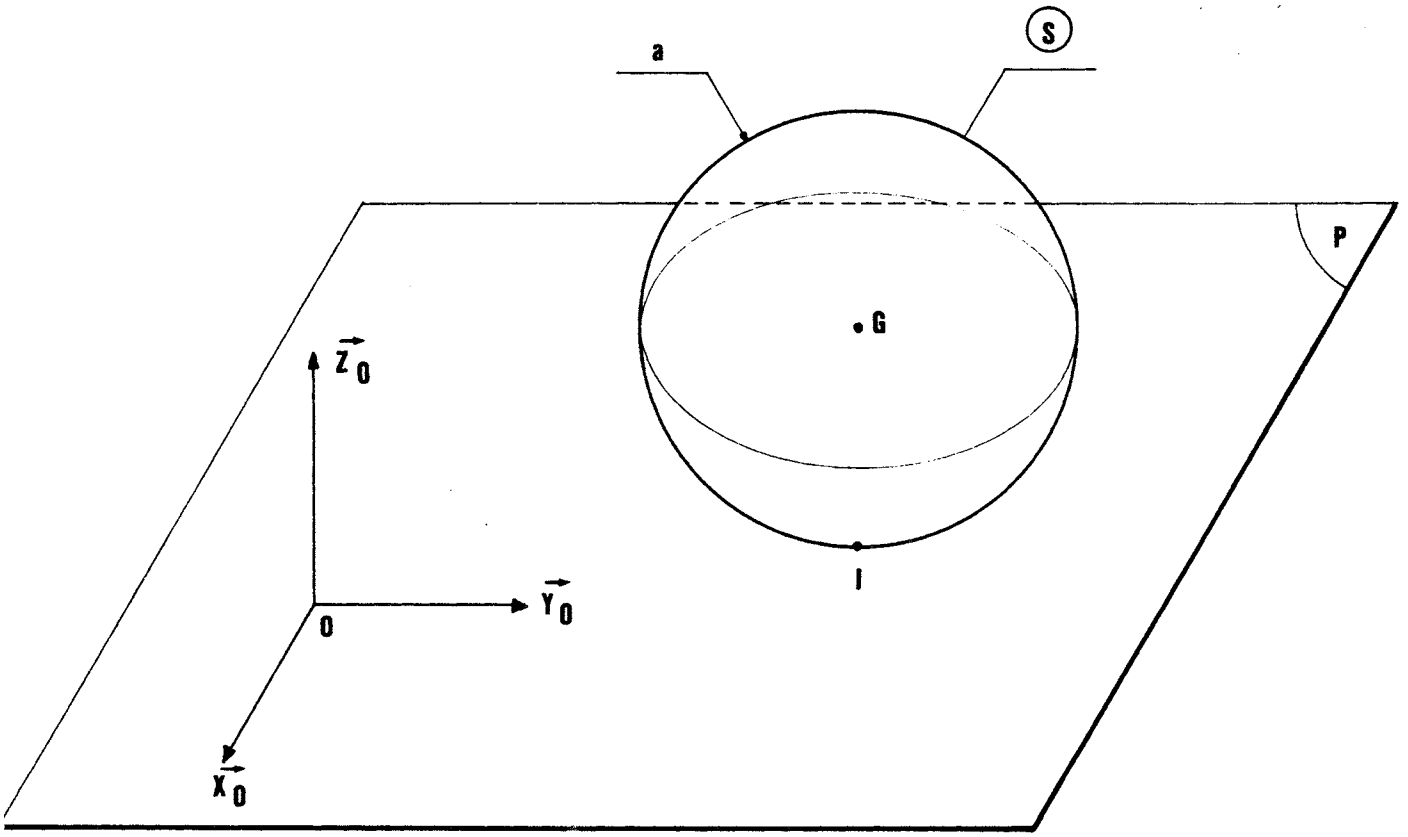
2°) Calculer le moment cinétique $\vec{\mu}^0(I)$ de la sphère en fonction de x, y, Ψ, Θ, Φ et de leurs dérivées.

3°) On suppose qu'il y a roulement sans glissement en I. Calculer $\vec{\mu}^0(I)$ en fonction de Ψ, Θ, Φ et de leurs dérivées. Comment peut-on simplifier le calcul ?

4°) Calculer les éléments du torseur dynamique en I dans le cadre des hypothèses de 3 .

5°) Calculer l'énergie cinétique de la sphère dans le cas général et avec les hypothèses de (3)

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.



© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

5-4-2 **SOLUTION :**

A) **Calcul de $\vec{V}_S^0(I)$: Vitesse d'un point de la sphère qui à l'instant t se trouve en I :**

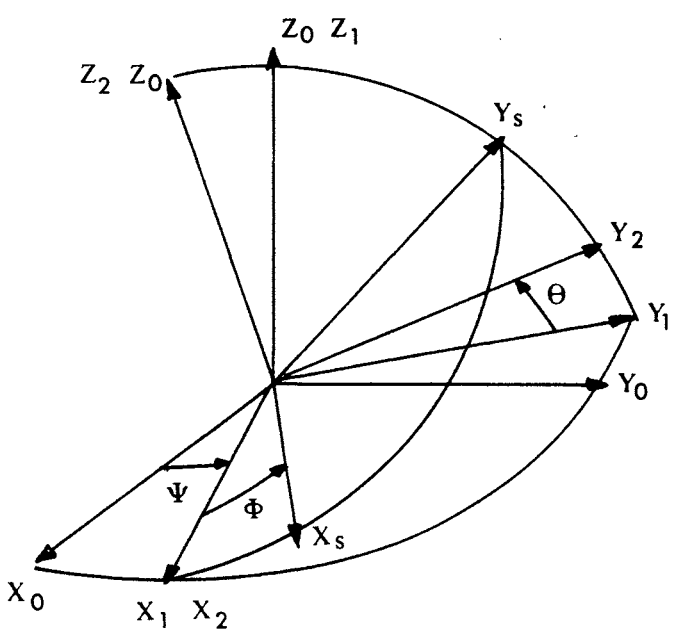
$$\vec{V}_S^0(I) = \vec{V}_S^0(G) + \vec{\Omega}_S^0 \wedge \overrightarrow{GI}$$

$$\vec{V}_S^0(G) = \frac{d^0}{dt}\overrightarrow{OG} = \frac{d^0}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ a \end{bmatrix}_{R_0} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0}$$

$$\vec{\Omega}_S^0 = \vec{\Omega}_S^2 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0$$

Le repérage se faisant avec les angles d'Euler normaux(type1)

On a



$$\vec{\Omega}_S^0 = \Phi'\vec{Z}_2 + \Theta'\vec{X}_1 + \Psi'\vec{Z}_0$$

$$Z_2 = \begin{bmatrix} \sin\Psi\cos\Theta \\ -\cos\Psi\sin\Theta \\ \cos\Theta \end{bmatrix}_{R_0}$$

$$\vec{X}_1 = \begin{bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0}$$

d'où

$$\vec{\Omega}_S^0 = \begin{bmatrix} \phi'\sin\psi\cos\Theta + \Theta'\cos\psi \\ \Theta'\sin\psi - \phi'\cos\psi\sin\Theta \\ \psi' + \phi'\cos\Theta \end{bmatrix}_{R_0} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_{R_0}$$

$$\overrightarrow{GI} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{bmatrix}_{R_0}$$

On a donc

$$\vec{V}_S^0(G) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{bmatrix}_R + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_{R_0} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{bmatrix}_{R_0}$$

$$\vec{V}_S^0(G) = \begin{bmatrix} x' - aq \\ y' + ap \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

B) Calcul du moment cinétique $\vec{\mu}^0_S(I)$:

Pour un solide la formule générale est la suivante:

$$\vec{\mu}^0(O_S) = \bar{\bar{I}}_{O_S} \cdot \vec{\Omega}^0_S + m\,\overrightarrow{O_S G} \wedge \vec{V}^0_{(O_S)}$$

On pourrait poser $O_S \equiv I$ mais il faudrait calculer le tenseur d'inertie de la sphère I alors que ce tenseur est particulièrement simple en G. On pose donc

$O_S \equiv G$ alors on obtient

$$\vec{\mu}^0(G) = \bar{\bar{I}}_G \cdot \vec{\Omega}^0_S$$

Connaissant $\vec{\mu}^0(G)$ on connaîtra $\vec{\mu}^0(I)$ en appliquant la formule suivante

$$\vec{\mu}^0(I) = \vec{\mu}^0(G) + m\vec{V}^0(G) \wedge \overrightarrow{GI}$$ $\Longrightarrow$ ceci est la forme de Koening pour le solide.

1°) *Calculons donc $\vec{\mu}^0(G)$:*

$$\bar{\bar{I}}_G = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{R_S, R_0} \quad \text{avec} \quad A = \frac{2}{5} ma^2$$

$$\vec{\Omega}^0_S = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_{R_0}$$

donc

$$\vec{\mu}^0(G) = \begin{bmatrix} Ap \\ Aq \\ Ar \end{bmatrix}_{R_0}$$

2°) *Calculons alors $\vec{\mu}^0(I)$:*

$$\vec{\mu}^0(I) = \begin{bmatrix} Ap \\ Aq \\ Ar \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{bmatrix}_{R_0}$$

$$\vec{\mu}^0(I) = \begin{bmatrix} Ap - may' \\ Aq + max' \\ Ar \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{2}{5} pa - y')ma \\ (\frac{2}{5} qa + x')ma \\ (\frac{2}{5} ra \times ma \end{bmatrix}_{R_0}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

C) Calcul de $\vec{\mu}^0(I)$ quand il y a roulement sans glissement

S'il y a roulement sans glissement en I alors :

$$\vec{V}_S^0(I) = 0 \Longrightarrow \begin{array}{l} x' = aq \\ y' = -ap \end{array}$$

En remplaçant on trouve

$$\vec{\mu}^0(I) = \begin{bmatrix} (\frac{2}{5}\,pa + pa)\ ma \\ (\frac{2}{5}\,qa + qa)\ ma \\ \frac{2}{5}\,ma^2 r \end{bmatrix}_{R_0} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5}\,ma^2 p \\ \frac{7}{5}\,ma^2 q \\ \frac{2}{5}\,ma^2 r \end{bmatrix}_{R_0}$$

Remarque : Calcul simplifié :

En I on a :

$$\vec{\mu}^0(I) = \bar{\bar{I}}_I \,.\, \vec{\Omega}_S^0 + m\overrightarrow{IG} \wedge \vec{V}^0(I)$$

Ici $\vec{V}^0(I)$ est la vitesse du point I∈ sphère par rapport à R_0:

Comme il y a roulement sans glissement

$$\vec{V}^0(I) = \vec{V}_S^0(I) = 0$$

$$\vec{\mu}^0(I) = \bar{\bar{I}}_I \,.\, \vec{\Omega}_S^0$$

$$\left[I_I\right] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_0}$$ corps de révolution autour de GI

$$\left.\begin{array}{l} A = \frac{2}{5}ma^2 + ma^2 = \frac{7}{5}\,ma^2 \\ B = \frac{2}{5}ma^2 + ma^2 = \frac{7}{5}\,ma^2 \\ C = \frac{2}{5}ma^2 \end{array}\right\}$$ Théorème de Huyghens

d'où

$$\vec{\Omega}_S^0 = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_{R_0} \qquad \text{d'où } \vec{\mu}^0(I) = \begin{bmatrix} \frac{7}{5}ma^2 p \\ \frac{7}{5}ma^2 q \\ \frac{2}{5}ma^2 r \end{bmatrix}_{R_0}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

D) Eléments du torseur dynamique en I :

1°) *Somme géométrique dynamique* :

$$\vec{\Sigma}^0 = \int_{P\in S} \vec{J}^0(I)\,dm = m\vec{J}^0(G) = \begin{bmatrix} mx'' \\ my'' \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0}$$

2°) *Moment dynamique* $\vec{\delta}^0(I)$:

Formule générale $\vec{\delta}^0(C) = \frac{d^0}{dt}\vec{\mu}^0(C) + \vec{V}^0(C) \wedge m\vec{V}^0(G)$

Si on fait $C \equiv I$

$$\vec{\delta}^0(I) = \frac{d^0}{dt}\vec{\mu}^0(I) + \vec{V}^0(I) \wedge m\vec{V}^0(G)$$

$\vec{V}^0(I)$ n'est pas la vitesse $\vec{V}^0_S(I)$ donc $\neq 0$

mais

$$\overrightarrow{IG} = a\vec{Z}_0$$

$$\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{IG} = a\vec{Z}_0$$

$$\vec{V}^0(G) - \vec{V}^0(I) = 0 \Longrightarrow \vec{V}^0(G) = \vec{V}^0(I)$$

et donc

$$\vec{V}^0(I) \wedge m\vec{V}^0(G) = 0$$

donc

$$\vec{\delta}^0(I) = \frac{d^0}{dt}\vec{\mu}^0(I)$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{\delta}^0(I) = \begin{bmatrix} \frac{7}{5}ma^2p' \\ \frac{7}{5}ma^2q' \\ \frac{7}{5}ma^2r' \end{bmatrix}_{R_0}$$

E) Energie cinétique de la sphère :

En supposant roulement sans glissement :

$$T^0 = \frac{1}{2}\vec{\Omega}^0_S \cdot \bar{\bar{I}}_G \cdot \vec{\Omega}^0_S + \frac{1}{2}m\left[\vec{V}^0(G)\right]^2$$

$$\vec{\Omega}^0_S = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_{R_0}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Remarque : Roulement sans glissement

$$p = -\frac{y'}{a} \qquad q = \frac{x'}{a}$$

$$T^0 = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}ma^2\,(p^2 + q^2 + r^2) + m(x'^2 + y'^2)\right]$$

$$T^0 = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}ma^2\left(\frac{y'^2}{a^2} + \frac{x'^2}{a^2} + r^2\right) + m\,(x'^2 + y'^2)\right]$$

$$T^0 = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}m\,(y'^2 + x'^2) + \frac{2}{5}ma^2r^2 + m(x'^2 + y'^2)\right]$$

$$T^0 = \frac{1}{5}m(x'^2 + y'^2) + \frac{1}{5}ma^2r^2 + \frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2)$$

$$T^0 = \frac{7}{10}m\,(x'^2 + y'^2) + \frac{1}{5}m\,a^2\,r^2$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Problème 5-5

Energie cinétique d'un volant excentré

5-5-1 ENONCE

Le système est composé de 3 solides S_0, S_1, S_2.

S_0 est le bâti de l'appareil

S_1 est une tige de masse négligeable articulée sans frottement en O_1

S_2 est un disque homogène de rayon R ,de masse m,d'épaisseur h,de centre G,articulé sans frottement au point O_2, distant du point G d'une distance d.

A (S_0) on lie le repère R_0 : $\left[O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0\right]$ tel que

$\vec{Z}_0$ vertical descendant

$\vec{Y}_0$ selon l'axe d'articulation de S_1 sur S_0

$\vec{X}_0 = \vec{Y}_0 \wedge \vec{Z}_0$

A (S_1) on lie le repère R_1 : $\left[O_1, \vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1\right]$ tel que

$\vec{Z}_1$ porté par l'axe de la tige

$\vec{Y}_1 = \vec{Y}_0$

$\vec{X}_1 = \vec{Y}_1 \wedge \vec{Z}_1$

On repère la rotation de $(S_1)/(S_0)$ par l'angle Θ tel que

$$\Theta = (\vec{Z}_0, \vec{Z}_1)$$

A (S_2) on lie le repère R_2 : $\left[O_2, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2\right]$ tel que

$\vec{Z}_2 = \vec{Z}_1$

$\vec{X}_2$ porté par $\overrightarrow{O_2G}$

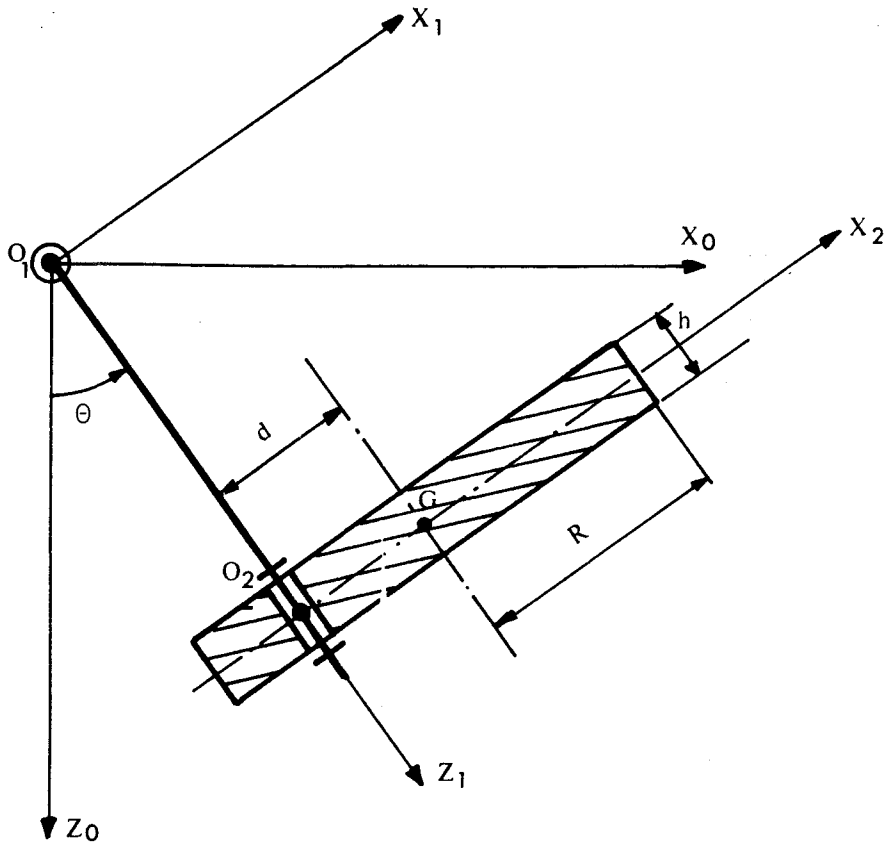
$\vec{Y}_2 = \vec{Z}_2 \wedge \vec{X}_2$

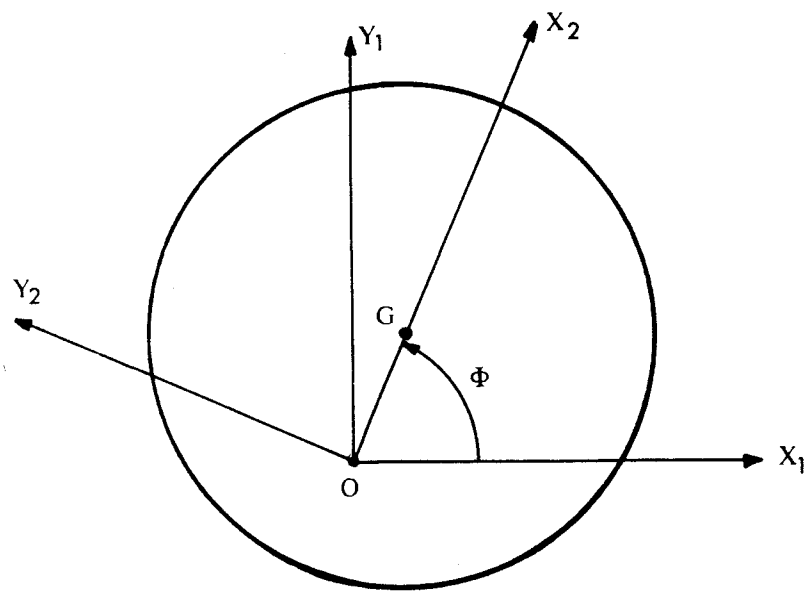
On repère la rotation de $(S_2)/(S_1)$ par l'angle Φ tel que

$$\Phi = (\vec{X}_1, \vec{X}_2)$$

On demande de calculer l'énergie cinétique du système .

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.





© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

5-5-2 **SOLUTION**

Le solide (S_1) étant sans masse on obtient

$$T^0 = T^0_{S_2} = \frac{1}{2} m \left[\vec{V}^0(G)\right]^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}^0_2 \; \bar{\bar{I}}_G \cdot \vec{\Omega}^0_2$$

1°) Calculons $\vec{V}^0(G)$:

$$\vec{V}^0(G) = \vec{V}^0(O_2) + \vec{\Omega}^0_2 \wedge \overrightarrow{O_2G}$$

$$\vec{V}^0(O_2) = \vec{V}^0(O_1) + \vec{\Omega}^0_1 \wedge \overrightarrow{O_1O_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{V}^0(O_1) = 0 \\ \vec{\Omega}^0_1 = \theta'\vec{Y}_1 \\ \overrightarrow{O_1O_2} = l\vec{Z}_1 \end{array}\right\} \qquad \vec{V}^0(O_2) = l\theta'\vec{X}_1$$

$$\vec{\Omega}^0_2 = \vec{\Omega}^1_2 + \vec{\Omega}^0_1$$

$$\vec{\Omega}^0_2 = \phi'\vec{Z}_1 + \theta'\vec{Y}_1$$

$$\vec{\Omega}^0_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta' \\ \phi' \end{bmatrix}_{R_1}$$

$$\overrightarrow{O_2G} = d\vec{X}_2 = d \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1}$$

donc

$$\vec{\Omega}^0_2 \wedge \overrightarrow{O_2G} = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta' \\ \phi' \end{bmatrix}_{R_1} \wedge \begin{bmatrix} d\cos\phi \\ d\sin\phi \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1} = \begin{bmatrix} -d\phi'\sin\phi \\ d\phi'\cos\phi \\ d\theta'\cos\phi \end{bmatrix}_{R_1}$$

Finalement

$$\vec{V}^0(G) = \begin{bmatrix} l\theta' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1} + \begin{bmatrix} -d\phi' \sin\phi \\ d\phi' \cos\phi \\ d\theta' \cos\phi \end{bmatrix}_{R_1}$$

$$\vec{V}^0(G) = \begin{bmatrix} l\theta' - d\phi'\sin\phi \\ d\phi'\cos\phi \\ d\theta'\cos\phi \end{bmatrix}_{R_1}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

2°) *Matrice représentative du tenseur d'inertie en G de (S_2)*

$$\left[I_G\right] = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(3R^2 + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(3R^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}_{R_1}$$

3°) *Calcul de T^0 :*

$$T^0 = \frac{1}{2} m\left[l^2\Theta'^2 + d^2\Phi'^2 + d^2\Theta'^2\cos^2\Phi - 2ld\Theta'\Phi'\sin\Phi\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[0,\ \Theta',\ \Phi'\right]_{R_1} \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \Theta' \\ \Phi' \end{bmatrix}_{R_1}$$

$$T = \frac{1}{2}m(l^2\Theta'^2 + d^2\Phi'^2 + d^2\Theta'^2\cos^2\Phi - 2ld\Theta'\Phi'\sin\Phi) + \frac{1}{2} \times \frac{m}{12}(3R^2 + h^2)\Theta'^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\Phi'^2$$

On peut encore écrire

$$T^0 = \frac{1}{2}\left\{ m\left[(l^2 + d^2\cos^2\Phi) + \frac{1}{12}(3R^2 + h^2)\right]\Theta'^2 + m\left(\frac{R^2}{2} + d^2\right)\Phi'^2 + 2mld\sin\Phi\Theta'\Phi' \right\}$$

Sous cette forme on voit bien que T^0 est une forme quadratique en Θ' et Φ'

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Problème 5-6

Energie cinétique d'un pendule à deux barres

5-6-1 **ENONCE**

Soit un repère R_0 : $\left[O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0 \right]$

On considère une barre OA, de longueur l, de masse négligeable, articulée en O par une liaison rotoïde parfaite d'axe $\vec{Y}_0$ et de telle manière que $\overrightarrow{OA}.\vec{Y}_0 = 0$

Une barre AB, de masse m, de longueur 2l, est reliée à la barre OA par une liaison rotoïde parfaite d'axe $\vec{Y}_0$ de telle manière que $\overrightarrow{AB}.\vec{Y}_0 = 0$

Sur la barre AB coulisse un anneau de masse M attaché en G, milieu de AB, par un ressort.

A la barre OA on lie le repère R_1 : $\left[O, X_1, Y_1, Z_1 \right]$

tel que
$$\vec{Y}_1 = \vec{Y}_0$$
$$\vec{Z}_1 = \frac{\overrightarrow{OA}}{l}$$
$$\vec{X}_1 = \vec{Y}_1 \wedge \vec{Z}_1$$

et on repère la rotation de R_1/R_0 par l'angle
$$\Theta = (\vec{Z}_0, \vec{Z}_1)$$

A la barre AB on lie le repère R_2 : $\left[A, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2 \right]$

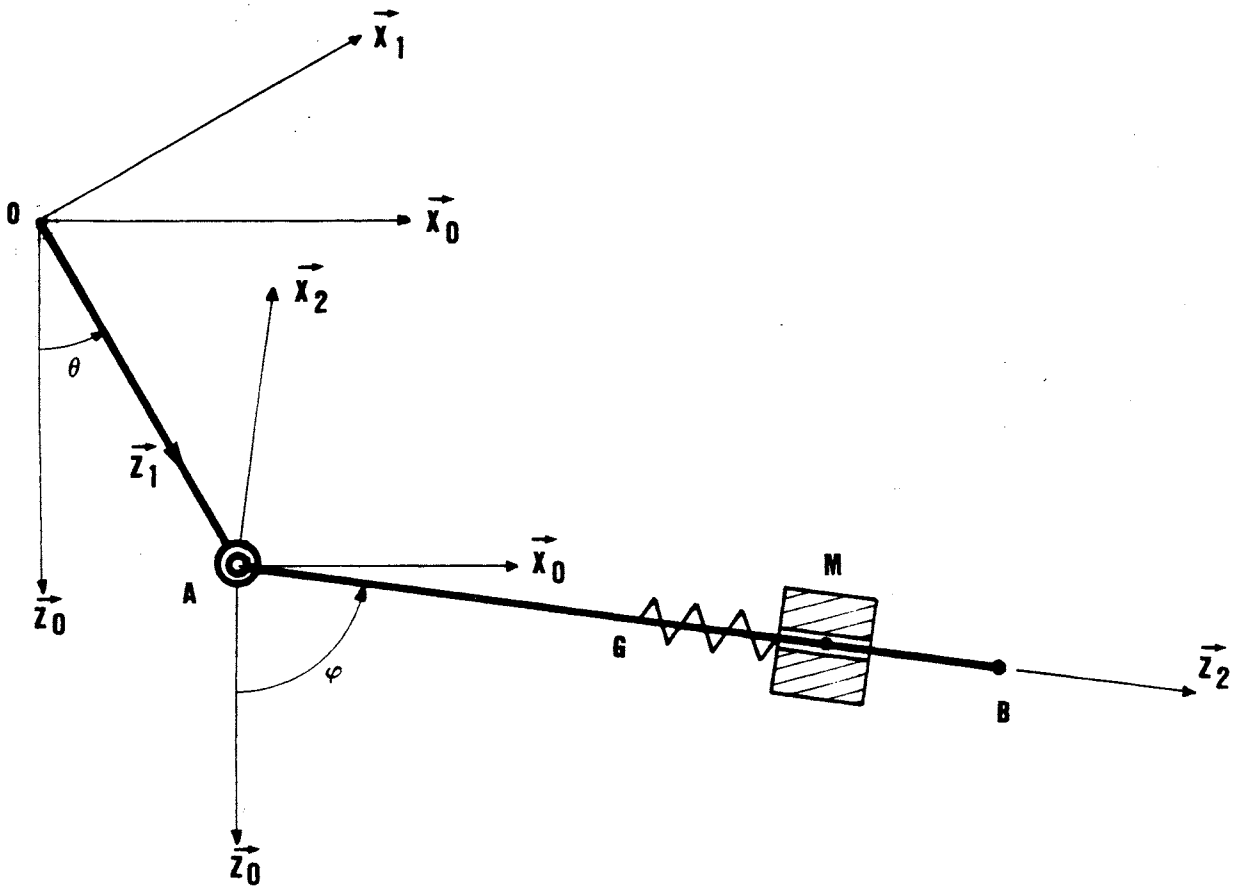
tel que
$$\vec{Y}_2 = \vec{Y}_1$$
$$\vec{Z}_2 = \frac{\overrightarrow{AB}}{2l}$$
$$\vec{X}_2 = \vec{Y}_2 \wedge \vec{Z}_2$$

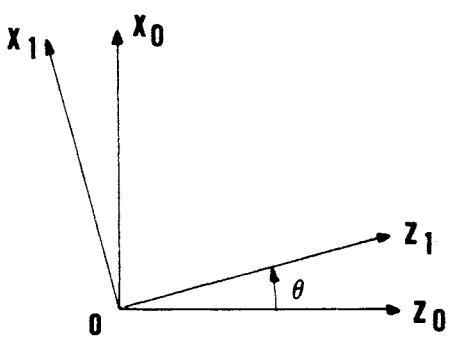
et on repère la rotation de R_2/R_0 par l'angle
$$\Phi = (\vec{Z}_0, \vec{Z}_2)$$

Finalement le déplacement de la masse M est tel que
$$\overrightarrow{GM} = r\,\vec{Z}_2 \qquad (\text{G : milieu de AB})$$

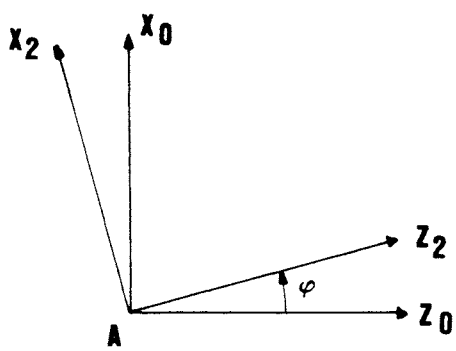
On demande de calculer l'énergie cinétique du système

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.





$\vec{Y}_1 = \vec{Y}_0$



$\vec{Y}_2 = \vec{Y}_0$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

5-6-2 SOLUTION

A) Calcul de l'énergie cinétique du système

$$T^0 = T^0_{AB} + T^0_M$$

1°) Calcul de T^0_{AB}

$$T^0_{AB} = \frac{1}{2}\, m\, \vec{V}^0(G) + \frac{1}{2}\, \vec{\Omega}^0_2 \cdot \bar{\bar{I}}_G \quad \vec{\Omega}^0_2$$

a)

$$\vec{V}^0(G) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}^0_2 \wedge \overrightarrow{AG}$$

$$\vec{\Omega}^0_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi' \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0} \qquad \overrightarrow{AG} = \begin{bmatrix} l\sin\Phi \\ 0 \\ l\cos\Phi \end{bmatrix}_{R_0}$$

$$\longrightarrow \vec{\Omega}^0_2 \wedge \overrightarrow{AG} = \begin{bmatrix} l\Phi' \cos\Phi \\ 0 \\ -l\Phi'\sin\Phi \end{bmatrix}_{R_0}$$

$$\vec{V}^0(A) = \vec{V}^0(0) + \vec{\Omega}^0_1 \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{V}^0(0) = 0$$

$$\vec{\Omega}^0_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \Theta' \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0} \qquad \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} l\sin\Theta \\ 0 \\ l\cos\Theta \end{bmatrix}_{R_0}$$

$$\vec{V}^0(A) = \begin{bmatrix} l\Theta'\cos\Theta \\ 0 \\ -l\Theta'\sin\Theta \end{bmatrix}_{R_0}$$

d'où

$$\vec{V}^0(G) = \begin{bmatrix} l\Theta'\cos\Theta + l\Phi'\cos\Phi \\ 0 \\ -l\Theta'\sin\Theta - l\Phi'\sin\Phi \end{bmatrix}_{R_0}$$

et l'on a

$$\left[\vec{V}^0(G)\right]^2 = (l\Theta'\cos\Theta + l\Phi'\cos\Phi)^2 + (l\Theta'\sin\Theta + l\Phi'\sin\Phi)^2$$

$$\left[\vec{V}^0(G)\right]^2 = l^2\Theta'^2 + l^2\Phi'^2 + 2l^2\Theta'\Phi'\cos(\Theta-\Phi)$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$$\left[\vec{V}^0(G)\right]^2 = l^2\left[\theta'^2 + \phi'^2 + 2\theta'\phi'\cos(\theta - \phi)\right]$$

b)
$$\bar{\bar{I}}_G = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{R_2} \qquad A = \int z^2 dm$$

$$A = \int z^2 . \frac{m}{2l}\, dz \Longrightarrow A = \frac{ml^2}{3}$$

$$\bar{\bar{I}}_G = \begin{bmatrix} \frac{ml^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi' \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0,R_2} \qquad \text{d'où } \vec{\Omega}_2^0 . \bar{\bar{I}}_G . \vec{\Omega}_2^0 = \frac{ml^2}{3}\phi'^2$$

d'où finalement

$$T_{AB}^0 = \frac{1}{2} ml^2 \left[\theta'^2 + \phi'^2 + 2\theta'\phi'\cos(\theta - \phi)\right] + \frac{ml^2}{6}\phi'^2$$

2°) *Calcul de T_M^0*

$$T_M^0 = \frac{1}{2} M \left[\vec{V}^0(M)\right]^2$$

$$\vec{V}^0(M) = \vec{V}^2(M) + \vec{V}_2^0(M)$$

$$\vec{V}^2(M) = \frac{d^2}{dt}(\overrightarrow{AM}) = \frac{d^2}{dt}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l+r \end{bmatrix}_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r' \end{bmatrix}_{R_2} = \begin{bmatrix} r'\sin\phi \\ 0 \\ r'\cos\phi \end{bmatrix}_{R_0}$$

$$\vec{V}_2^0(M) = \vec{V}_2^0(A) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{AM}$$

$\vec{V}_2^0(A) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{OA}$ calculé précédemment.

$$\vec{V}_2^0(A) = \begin{bmatrix} l\theta'\cos\theta \\ 0 \\ -l\theta'\sin\theta \end{bmatrix}_{R_0}$$

$$\vec{V}_2^0(M) = \begin{bmatrix} l\theta'\cos\theta \\ 0 \\ -l\theta'\sin\theta \end{bmatrix}_{R_0} + \begin{bmatrix} 0 \\ \phi' \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0} \wedge \begin{bmatrix} (l+r)\sin\phi \\ 0 \\ (l+r)\cos\phi \end{bmatrix}_{R_0}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$$\vec{V}_2^0(M) = \begin{bmatrix} l\theta'\cos\theta + (l+r)\phi'\cos\phi \\ 0 \\ -l\theta'\sin\theta - (l+r)\phi'\sin\phi \end{bmatrix}_{R_0}$$

et donc

$$\vec{V}^0(M) = \begin{bmatrix} r'\sin\phi + l\theta'\cos\theta + (l+r)\phi'\cos\phi \\ 0 \\ r'\cos\phi - l\theta'\sin\theta - (l+r)\phi'\sin\phi \end{bmatrix}_{R_0}$$

et on obtient

$$\left[\vec{V}^0(M)\right]^2 = (r'\sin\phi + l\theta'\cos\theta + (l+r)\phi'\cos\phi)^2 + (r'\cos\phi - l\theta'\sin\theta - (l+r)\phi'\sin\phi)^2$$

$$\left[\vec{V}^0(M)\right]^2 = r'+l^2\theta'^2+(l+r)^2\phi'^2-2r'l\theta'\sin(\theta-\phi)-2l(l+r)\theta'\phi'\cos(\theta-\phi)$$

On a donc

$$T_M^0 = \frac{1}{2} M \left[r'+l^2\theta'^2+(l+r)^2\phi'^2-2lr'\theta'\sin(\theta-\phi)-2l(l+r)\theta'\phi'\cos(\theta-\phi) \right]$$

3°) Energie cinétique totale

$$T^0 = T_{AB}^0 + T_M^0$$

$$T^0 = \frac{1}{2}\left\{ ml^2 \left[\theta'^2+\phi'^2+2\theta'\phi'\cos(\theta-\phi)\right] + \frac{1}{6}\phi'^2 + M\left[r'+l^2\theta'^2+(l+r)^2\phi'^2 -2lr'\theta'\sin(\theta-\phi)-2l(l+r)\theta'\phi'\cos(\theta-\phi)\right]\right\}$$

© [JP.BROSSARD], [1994], INSA de Lyon, tous droits réservés.