



© [Helder Almeida] / [Fotolia]

ELASTICITE ET RESISTANCE DES MATERIAUX

Cours

FORMATION 

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

4 SGM

Version 2009
Année scolaire 2009 – 2010

Auteur de la Ressource Pédagogique
M. Olagnon Christian



Département Science et Génie des Matériaux

4 SGM

Elasticité
et
résistance des matériaux

Sommaire :

1	RAPPELS DE MECANIQUE.....	4
1.1	CONTRAINTES	4
1.2	CHAMP DE CONTRAINTE EN UN POINT.....	4
1.3	LOI DE COMPORTEMENT ELASTIQUE.....	9
1.4	EQUATIONS D'EQUILIBRE OU AUX LIMITES	10
1.5	METHODES DE RESOLUTION DE PROBLEMES.....	13
2	EXEMPLES DE RESOLUTION DE PROBLEMES.....	15
2.1	TORSION D'UN CYLINDRE.....	15
2.2	CYLINDRE EPAIS SOUMIS A UNE PRESSION.....	19
2.3	ELASTICITE PLANE.	22
3	RESISTANCE DES MATERIAUX : POUTRES.....	25
3.1	DEFINITIONS, PRINCIPES ET HYPOTHESES	25
3.2	DIAGRAMME FONDAMENTAL.....	27
3.3	CONTRAINTES ET DEFORMATIONS - FORMULE DE BRESSE	30
3.4	CALCULS ENERGETIQUES	35
3.5	SYSTEMES HYPERSTATIQUES.....	43

ANNEXE I : *Notations et symboles*

ANNEXE II : *Intégrales de Mohr*

ANNEXE III : *Contrainte de cisaillement dans une poutre à section rectangulaire*

ANNEXE IV : *Equations d'équilibre indéfini en coordonnées cylindriques et sphériques*

Introduction

Ce cours fait suite à celui de 3SGM sur les solides élastiques déformables. Même si quelques rappels généraux sont présentés en première partie, nous supposons le lecteur familier avec les notions de tenseur des contraintes et des déformations, ainsi que des relations de Hooke reliant les deux.

Le but de ce cours, assez appliqué n'est pas de former des mécaniciens du solide, mais de donner à de futurs ingénieurs une culture générale de mécanique, leur permettant plus tard d'effectuer de petits calculs, de demander et de comprendre des calculs plus conséquents. Le plus sûr moyen d'atteindre cet objectif est d'étudier les équations et de les appliquer en reprenant des problèmes classiques de mécanique. Comme pour la plupart des problèmes de physique les aspects les plus délicats à maîtriser sont les équations aux limites. Cela devient particulièrement vrai avec les méthodes numériques puissantes disponibles de nos jours.

« Quelle est l'utilité de faire tous ces calculs analytiques alors qu'avec l'ordinateur, toutes les résolutions sont possibles sans réfléchir ? ». Cette question, revient inlassablement d'année en année durant les cours de mécanique, parfois même de bonne foi. La réponse est pourtant simple, même si elle n'est pas toujours entendue. Une utilisation correcte d'un logiciel quelconque de mécanique (éléments finis ou autre) requiert une bonne connaissance de la mécanique pour : (i) définir le problème, (ii) analyser la solution et (iii) critiquer la solution. Le meilleur moyen pour acquérir cette connaissance reste de réfléchir et de comprendre un minimum de théorie et de reprendre quelques exemples de problèmes en discutant sur les conditions et les solutions.

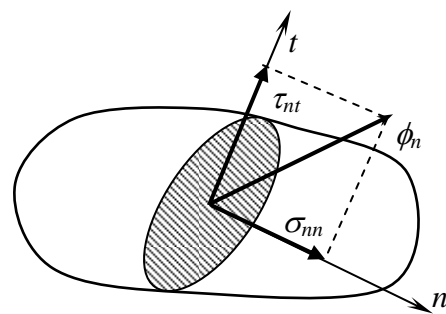
Nous allons développer trois parties. Après un rappel bref des outils de la mécanique des milieux continus, nous présenterons quelques méthodes générales de résolution de problèmes d'élasticité, puis une introduction à la théorie des poutres.

1 Rappels de mécanique

Rappelons qu'en mécanique du solide les grandeurs de base sont les forces et les déplacements, qui permettent de calculer directement des énergies. En mécanique des milieux continus, il en est de même, mais on travaille avec des grandeurs normalisées. Pour simplifier disons que les contraintes sont des forces par unité de surface et les déformations sont des variations de longueur par unité de longueur.

1.1 Contraintes

Le but de la mécanique appliquée au matériau est de calculer la « contrainte » s'exerçant en un point sur une « facette » donnée d'un matériau¹. Cette contrainte est représentée par un vecteur, $\vec{\phi}_n$. La composante de ce vecteur, perpendiculaire à la facette représente une contrainte normale, σ_{nn} (équivalent à une pression), alors que la composante parallèle à la facette, une contrainte tangentielle τ_{nt} (cf figure).



Ces deux composantes jouent un rôle très important pour le matériau, puisque les contraintes normales induisent des ruptures de type fragile, alors que les contraintes de cisaillement induisent de la plasticité. Le but des calculs de mécanique est de déterminer pour un point donné les facettes qui supportent un vecteur contrainte particulier. Nous allons voir que toutes les contraintes de toutes les facettes peuvent être déterminées par la connaissance du tenseur des contraintes en un point.

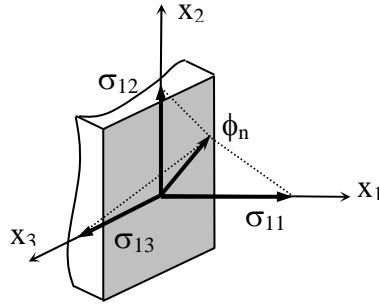
1.2 Champ de contrainte en un point

Le champ de contrainte en un point O d'un solide est complètement défini par un tenseur d'ordre 2. Dans un repère quelconque $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$, cet état de contrainte est défini par 6 composantes que l'on peut représenter sous forme matricielle selon :

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_{(O, x_1, x_2, x_3)}$$

Les composantes d'une ligne ou d'une colonne représentent les composantes du vecteur contrainte s'exerçant sur une facette perpendiculaire à un des axes, dans le repère $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$. Par exemple, les composantes de la première ligne $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ sont celles du vecteur contrainte s'exerçant sur une facette perpendiculaire à l'axe Ox_1 (cf. figure).

¹ On pourrait bien sûr tenir le même propos avec les déformations, vecteur déformation et déformations sur une facette. Pour simplifier l'exposé, on présente d'abord les contraintes, puis les déformations seront abordées.



On définit les **directions principales** pour lesquelles le vecteur contrainte s'exerçant sur une facette normale à ces directions, est parallèle à la normale, ce qui signifie que les contraintes tangentielles sont nulles. Ces directions principales sont au nombre de 3, normales entre elles. Elles forment donc un repère (dit principal), pour lequel les contraintes tangentielles sont nulles. En conséquence, dans ce repère $(O, \vec{x}_I, \vec{x}_{II}, \vec{x}_{III})$, le tenseur des contraintes est décrit par seulement 3 composantes :

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}_{(O, \vec{x}_I, \vec{x}_{II}, \vec{x}_{III})}$$

A partir de la connaissance de l'état de contrainte, et donc du tenseur, on peut calculer le vecteur contrainte $\vec{\phi}_n$ de toute facette dont la normale est \vec{n} selon :

$$\vec{\phi}_n = \tilde{\sigma} \cdot \vec{n}$$

ou bien en développant dans le repère $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$:

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

Ce vecteur contrainte peut évidemment s'exprimer dans tout repère, quelconque (et bien sûr dans le repère principal), mais pour lui donner un sens plus mécanique, nous avons déjà dit qu'on le décompose selon un repère (\vec{n}, \vec{t}) lié à la facette. Les composantes σ_{nn} et τ_{nt} seront alors obtenues en effectuant la projection de $\vec{\phi}_n$ sur \vec{n} et sur \vec{t} respectivement, selon :

$$\sigma_{nn} = \vec{\phi}_n \cdot \vec{n} \quad \text{et} \quad \tau_{nt} = \vec{\phi}_n \cdot \vec{t}$$

Ces composantes peuvent s'écrire directement à partir d'un calcul tensoriel selon :

$$\sigma_{nn} = \vec{n}^t \tilde{\sigma} \vec{n}$$

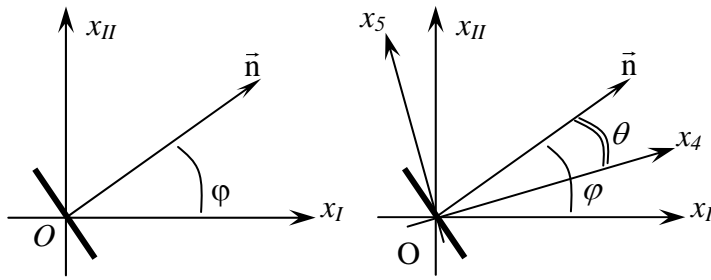
$$\tau_{nt} = \vec{t}^t \tilde{\sigma} \vec{n}$$

où l'exposant ^t indique la transposée de la matrice colonne.

Le tenseur des contraintes peut être représenté graphiquement par le **tricerclé de Mohr**. Cette figure permet d'avoir une vue globale du champ de contrainte.

Un **cerclé de Mohr** représente le point $M(\sigma_{nn}, \tau_{nt})$ dans le repère (O, \vec{n}, \vec{t}) , lorsqu'on considère l'ensemble des facettes parallèles à un axe principal. Par exemple, considérons l'ensemble des facettes parallèles à l'axe \vec{x}_{III} (cf figure).

La normale \vec{n} de ces facettes peut être orientée par l'angle φ dans le repère principal $(O, \vec{x}_I, \vec{x}_{II}, \vec{x}_{III})$ ou bien par un angle quelconque (disons θ par exemple) dans tout autre repère $(O, \vec{x}_4, \vec{x}_5, \vec{x}_{III})$ se déduisant du premier par une rotation θ autour de x_{III} .



L'abscisse et l'ordonnée du point M peuvent être alors calculées en fonction de l'angle θ ou bien φ , en donnant bien évidemment les mêmes valeurs. Exprimons ces coordonnées plutôt en fonction de φ , pour des raisons de simplicité.

Calculons d'abord le vecteur contrainte $\vec{\phi}_n$:

$$\vec{\phi}_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_I \cos \varphi \\ \sigma_{II} \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

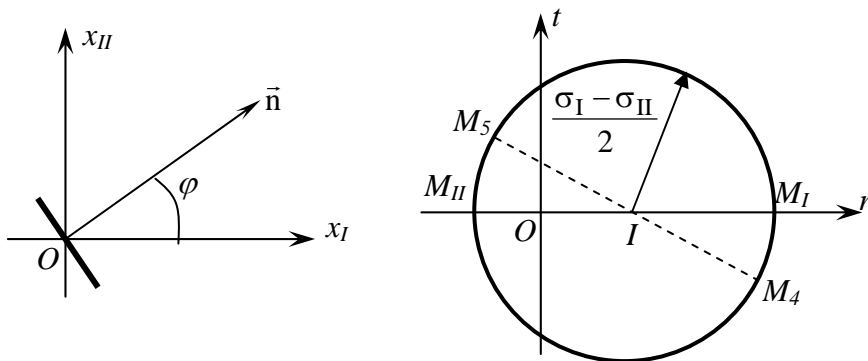
puis les composantes σ_{nn} et τ_{nt} :

$$\begin{cases} \sigma_{nn} = \vec{\phi}_n \cdot \vec{n} = \sigma_I \cos^2 \varphi + \sigma_{II} \sin^2 \varphi \\ \tau_{nt} = \vec{\phi}_n \cdot \vec{t} = -\sigma_I \cos \varphi \sin \varphi + \sigma_{II} \cos \varphi \sin \varphi \end{cases}$$

En utilisant les propriétés des fonctions sinus et cosinus, les relations précédentes peuvent se simplifier en :

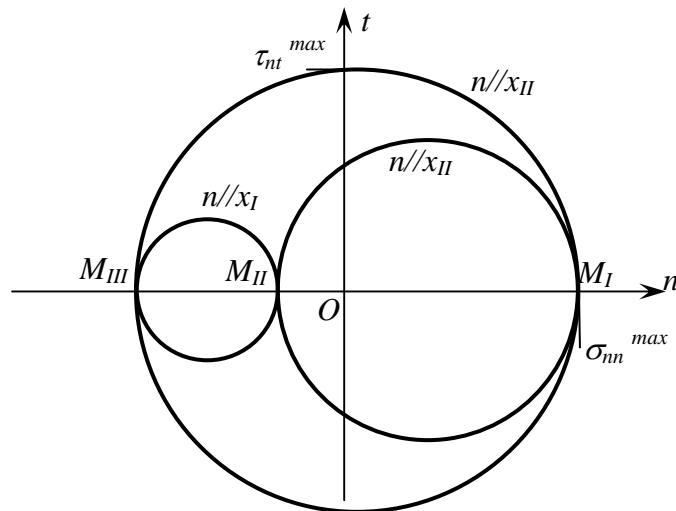
$$\begin{cases} \sigma_{nn} = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} + \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \cos 2\varphi \\ \tau_{nt} = 0 - \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \sin 2\varphi \end{cases} \equiv \begin{cases} x = x_o + R \cos \alpha \\ y = y_o + R \sin \alpha \end{cases}$$

où l'on reconnaît un cercle de rayon $(\sigma_I - \sigma_{II})/2$ et de centre le point I d'abscisse $(\sigma_I + \sigma_{II})/2$ et d'ordonnée 0. Ainsi ce cercle (figure) représente toutes les facettes parallèles à l'axe principal x_{III} . Sur ce cercle, on peut par exemple représenter les facettes de normales x_4 et x_5 du repère défini plus haut¹.



¹ On notera que dans l'expression du cercle de Mohr, l'angle 2φ apparaît, et que la composante τ_{nt} apparaît avec le signe négatif. Cela signifie que lorsque l'angle entre deux directions est par exemple α , les points représentatifs de ces deux directions sont à -2α sur le cercle de Mohr. Cela implique en outre que deux directions normales entre elles sont sur un diamètre du cercle : exemple x_1 et x_2 donnent M_1 et M_2

On peut facilement effectuer le même calcul et donc la même représentation pour l'ensemble des facettes parallèles aux deux autres axes principaux. La représentation de ces trois cercles dans le repère (\vec{n}, \vec{t}) sur la même figure donne le tricerclé de Mohr. On obtient alors une « vue » de l'état de contrainte, donnant instantanément les contraintes normales maximales (traction ou compression) ainsi que le cisaillement maximal (cf figure). Le cas général d'un point représentatif d'une facette parallèle à aucun des axes principaux se trouve quelque part entre les trois cercles.



Champ de déformation en un point.

De manière similaire au champ de contrainte, on définit un champ de déformation qui peut se représenter en un point par un tenseur. Dans un repère quelconque $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$, il est défini par 6 composantes que l'on peut représenter sous forme matricielle selon :

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}_{(O, x_1, x_2, x_3)}$$

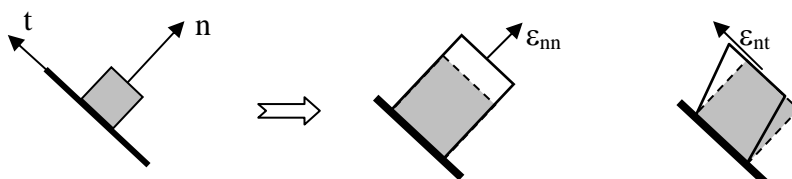
Ce que nous avons dit ci-dessus pour le tenseur des contraintes reste vrai, et les directions principales des contraintes et des déformations coïncident. De même, on va pouvoir calculer l'équivalent du vecteur contrainte, le vecteur déformation $\vec{\phi}_n^\varepsilon$ sur une facette de normale \vec{n} .

$$\vec{\phi}_n^\varepsilon = \tilde{\varepsilon} \cdot \vec{n}$$

Toujours pour donner un sens mécanique, on peut exprimer ce vecteur dans le repère (O, \vec{n}, \vec{t}) lié à la facette dont les composantes sont :

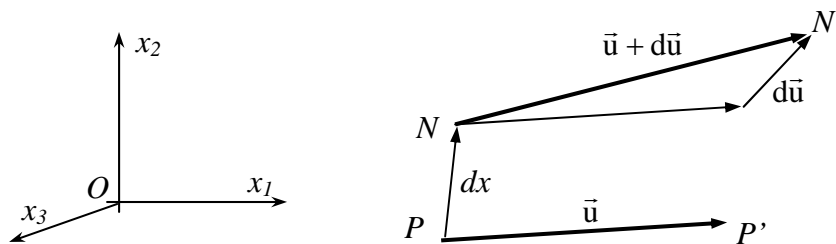
$$\varepsilon_{nn} = \vec{\phi}_n^\varepsilon \cdot \vec{n} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{nt} = \vec{\phi}_n^\varepsilon \cdot \vec{t}$$

ε_{nn} représente une déformation de la facette selon la direction normale, c'est-à-dire une dilatation (ou une contraction si elle est négative). ε_{nt} représente un cisaillement au niveau de la facette. On peut illustrer ces déformations en représentant schématiquement le changement de forme d'un cube élémentaire au niveau de la facette (cf figure).



D'un point de vue mécanique les déformations sont exprimées à partir des déplacements. Rappelons le principe de calcul que nous aurons l'occasion d'utiliser plus loin.

Dans un repère $(O, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ on considère un point $P(x)^1$ tel que $\overline{OP} = \bar{x}$, qui après transformation vient en P' tq. $\overline{OP'} = \bar{x} + \bar{u}$, donc le vecteur $\overline{PP'}$ a pour coordonnées $\bar{u}(x)$. On considère un deuxième point $N(x+dx)$, voisin du premier qui après la transformation est tel que $\overline{ON'} = \bar{x} + \bar{u} + d(\bar{x} + \bar{u})$. Le vecteur $\overline{NN'}$ a donc pour coordonnées $\bar{u} + d\bar{u}$ (cf. figure).



Il peut donc se mettre sous la forme :

$$\overline{NN'} = \overline{PP'} + d\bar{u}$$

En écrivant la forme développée de $\bar{u}(u_1, u_2, u_3)$ où bien sûr chaque composante dépend des variables (x_1, x_2, x_3) , explicitons cette différentielle $d\bar{u}$:

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3$$

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3$$

$$du_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3$$

On définit ainsi un tenseur gradient de déplacement $\tilde{\varepsilon}$:

$$d\bar{u} = \tilde{\varepsilon} \cdot d\bar{x} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\overline{NN'}$ peut alors s'exprimer selon :

$$\overline{NN'} = \bar{u} + \tilde{\varepsilon} \cdot d\bar{x}$$

Le premier terme représente un déplacement global, i.e. une translation². Le deuxième terme inclut à la fois la déformation $\tilde{\varepsilon}$ et une rotation $\tilde{\omega}$ dont les composantes sont définies selon³ :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{et} \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Le vecteur $\overline{NN'}$ peut finalement s'exprimer :

$$\overline{NN'} = \bar{u} + \tilde{\omega} \cdot d\bar{x} + \tilde{\varepsilon} \cdot d\bar{x}$$

Seul le dernier terme caractérise une déformation de l'objet (au sens d'un éloignement des points P et N après transformation), et en élasticité est relié au tenseur des contraintes.

¹ Afin de compacter l'écriture, x désigne les composantes de x , c'est-à-dire $x = (x_1, x_2, x_3)$ ou encore le vecteur x .

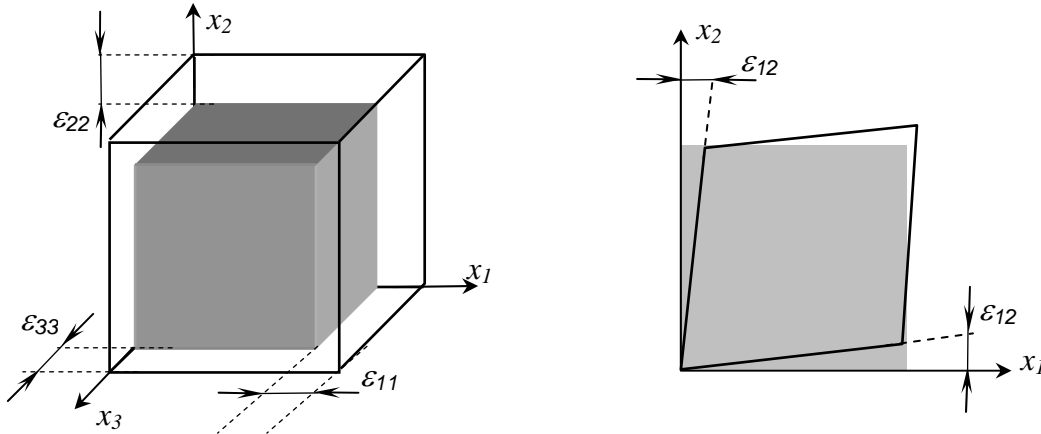
² Si le gradient de déplacement est nul, alors le solide est rigide et subit seulement une translation.

³ Calcul valable en petits déplacements et déformations, généralement le cas en élasticité.

Pour expliciter ce tenseur déformation considérons tout d'abord les termes diagonaux :

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Ils sont équivalents à ε_{nn} avec $\vec{n} = \vec{x}_i$, donc représentent la dilatation selon la direction i . En représentant leur action sur un cube élémentaire (cf figure) orienté dans le repère $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ on comprend qu'ils sont reliés à la variation de volume de l'objet. De même les autres termes ε_{ij} avec $i \neq j$, équivalent à ε_{nt} avec $\vec{n} = \vec{x}_i$ et $\vec{t} = \vec{x}_j$ représente des distorsions du cube élémentaire (cf. figure).



En conséquence, la variation relative du volume d'une structure soumise à un tenseur de déformation $\tilde{\varepsilon}$ est donnée par la trace du tenseur :

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

Comme pour les contraintes, on peut représenter l'état de déformation en un point par un tricerclé de Mohr. La réalisation est identique.

1.3 Loi de comportement élastique

La loi de comportement dans le domaine élastique est très simple puisqu'elle suppose proportionnalité entre tenseurs des contraintes et des déformations. Le facteur de proportionnalité entre deux tenseurs de rang 2 est dans le cas général un tenseur de rang 4 :

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\tilde{E}} \cdot \tilde{\varepsilon}$$

Dans le cas de solides isotropes, seules deux constantes indépendantes sont nécessaires, et la relation précédente peut se développer selon les **équations** dites de **Lamé** :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11} \\ \sigma_{22} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22} \\ \sigma_{33} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33} \\ \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} \\ \sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13} \\ \sigma_{23} = 2\mu\varepsilon_{23} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \\ G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases}$$

où ν est le coefficient de Poisson, E le module d'élasticité ou de Young, G le module de cisaillement (aussi écrit μ) et λ le coefficient de Lamé.

La relation est également connue sous sa forme inversée des déformations en fonction des contraintes sous l'appellation de **relations de Young** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \\ \varepsilon_{13} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} \\ \varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23} \end{array} \right.$$

On constate immédiatement que l'utilisation de ces relations dans un repère principal amène simplement à éliminer les parties tangentielles, c'est-à-dire les 3 dernières équations. La signification de ces équations apparaît alors plutôt bien en disant, par exemple, que la déformation selon la direction 1, ε_{11} , est inversement proportionnelle à la contrainte dans la même direction, σ_{11} , retranchée des effets de Poisson causés par les contractions dans les directions perpendiculaires : $\nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})$.

L'énergie élastique volumique élémentaire (pour une déformation élémentaire $d\tilde{\varepsilon}$) s'exprime selon :

$$\delta W = \sum_{i,j} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

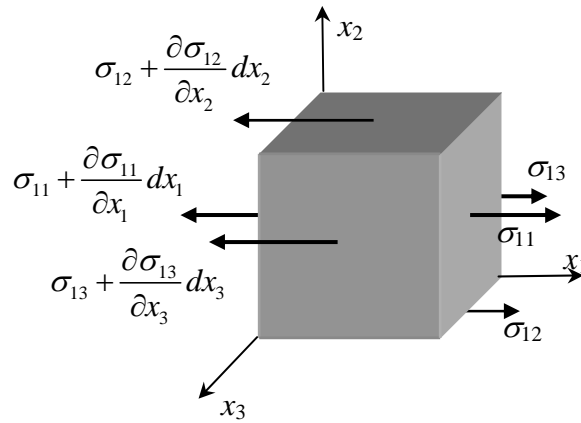
En remplaçant les déformations par les lois de Hooke et en intégrant (lois linéaires) de 0 à $\tilde{\varepsilon}$, on obtient l'expression de l'énergie volumique dans un repère quelconque :

$$W = \frac{1}{2E} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33}) + \frac{1}{2\mu} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)$$

1.4 Equations d'équilibre ou aux limites

La résolution d'un problème de mécanique va consister à trouver une fonction solution qui peut s'exprimer de manière générale comme une fonction : $\tilde{\varepsilon}(x, y, z)$ ou $\tilde{\sigma}(x, y, z)$. Cette fonction doit bien sûr, comme pour tout problème physique vérifier les équations de continuité et être compatible avec les limites du problème.

Le premier jeu d'équations est généralement appelé **équations d'équilibre indéfini**. De façon simple, elles traduisent l'équilibre des forces d'un élément de volume. On effectue la somme des projections des forces selon les 3 axes, ce qui conduit à un jeu de 3 équations. On va comme exemple établir la première équation en projetant les forces selon l'axe 1 (figure). Dans un repère rectangulaire le calcul est particulièrement simple puisque chaque face de l'élément de volume présente la même aire.



En l'absence de force de volume et en statique, la somme des forces selon l'axe 1 conduit à la relation :

$$\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

que l'on peut simplifier par les dx . En faisant de même selon les deux autres axes, on obtient deux autres équations, donnant le système complet :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

et on peut écrire ce système sous forme condensée :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

ou bien en utilisant l'opérateur vectoriel de la divergence :

$$\text{div}(\vec{\sigma}) = 0$$

L'ajout de forces de volume \mathbf{F}^v est facile à réaliser en partant de l'équilibre statique qui sera modifié en tenant compte de ces forces¹. L'équation d'équilibre indéfini devient :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i^v = 0$$

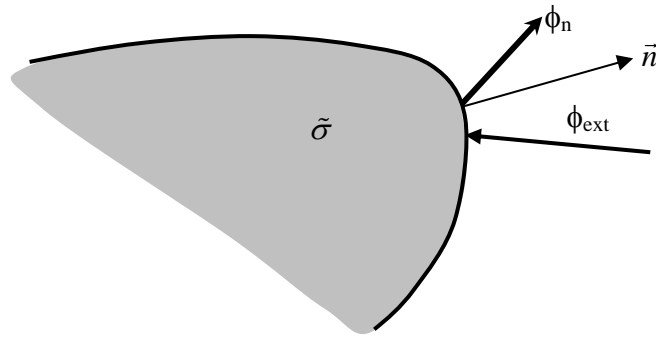
De même l'équation d'équilibre peut être étendue en tenant compte d'une accélération, permettant alors de calculer, notamment des vibrations :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i^v = \rho \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}$$

L'équation ainsi obtenue est une variante de l'équation générale de la mécanique appliquée aux solides indéformables.

La deuxième série de conditions à vérifier sont les équations d'équilibres **aux limites** de l'objet. Le vecteur contrainte $\vec{\phi}_n$ calculé sur une surface par le tenseur doit être égal au vecteur force (par unité de surface) induit par les forces extérieures (cf figure).

¹ Par force de volume, on entend des forces proportionnelles au volume du solide, comme la masse de l'objet, une force due à un champ électrique etc.



Cela va s'exprimer de manière générale selon :

$$\tilde{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{\phi}_{ext}$$

Explicitons cette équation à quelques cas particuliers.

Les plus simples sont les **surfaces libres**, c'est-à-dire les surfaces sur lesquelles ne s'exerce aucune force. L'expression précédente se simplifie :

$$\tilde{\sigma} \cdot \vec{n} = 0$$

Dans le cas d'un tenseur exprimé dans un repère $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$, si l'on considère une surface perpendiculaire à, par exemple, l'axe x_1 (i.e. $\vec{n} = \vec{x}_1$), la condition devient :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_{11} = 0 \\ \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{13} = 0 \end{cases}$$

La contrainte normale est évidemment nulle, mais également les contraintes de cisaillement. Ceci est un résultat important à retenir : **les contraintes de cisaillement sont nulles sur une surface libre**.

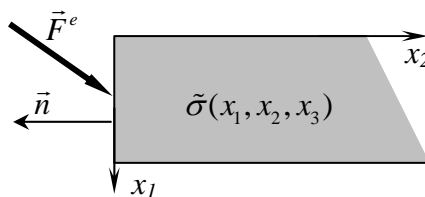
Un calcul simple peut également être obtenu si la force extérieure est sous la forme d'une pression appliquée. La relation devient :

$$\tilde{\sigma} \cdot \vec{n} = P \cdot \vec{n}$$

Dans de nombreux cas, la force appliquée à l'extérieur est considérée comme ponctuelle \vec{F}^e , ce qui mène à une discontinuité, difficile à traiter avec des solutions analytiques. Dans ce cas on est souvent amené à écrire que la « somme » des contraintes sur la surface est équivalente à la force appliquée :

$$\int_s (\tilde{\sigma} \cdot \vec{n}) ds = \vec{F}^e$$

Cela revient à dire que la solution n'est exacte que si la force \vec{F}^e suit en fait la répartition des contraintes (cf figure).



1.5 Méthodes de résolution de problèmes

Nous avons déjà dit que résoudre un problème d'élasticité revient à « trouver » une fonction qui satisfait aux différentes équations de mécanique et d'équilibre. Pour « trouver » une solution analytique à un problème, il existe plusieurs méthodes, détaillées dans des ouvrages plus conséquents. Nous allons simplement illustrer le principe en présentant deux méthodes différentes : en partant des déplacements et en partant des déformations (ou contraintes). En fait le départ est assez similaire, puisque l'on part d'observations ou bien d'hypothèses que l'on simplifiera éventuellement.

La première méthode est plutôt simple, car à partir des déplacements, on calcule directement les déformations par dérivation. Les contraintes sont ensuite directement évaluées. Il suffit de vérifier les équations d'équilibre, ou bien lorsque l'expression des déplacements ou des contraintes fait appel à des constantes, les déterminer à partir des équations d'équilibre.

La deuxième méthode est un peu plus compliquée, puisqu'il faudra intégrer pour passer des déformations aux déplacements, donnant ainsi une série de conditions d'intégrations appelées **équations de compatibilité**.

Equations de compatibilité dans le plan

Pour illustrer les équations de compatibilité, on peut considérer le problème plan, puisque le principe est plus simple, mais identique. On suppose donc connues les déformations : ε_{11} , ε_{22} et ε_{12} , fonctions des variables x_1 et x_2 . On cherche 2 fonctions $u_1(x_1, x_2)$ et $u_2(x_1, x_2)$, composantes de la fonction déplacement $\vec{u}(x_1, x_2)$ telles que :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{11} \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \varepsilon_{22} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 2\varepsilon_{12}$$

donc les fonctions u_1 et u_2 peuvent se différencier selon :

$$\begin{cases} du_1 = \varepsilon_{11} \cdot dx_1 + X \cdot dx_2 \\ du_2 = Y \cdot dx_1 + \varepsilon_{22} \cdot dx_2 \end{cases} \quad \text{avec } X + Y = 2\varepsilon_{12}$$

du_1 correspond à $(\varepsilon_{11}dx_1 + Xdx_2)$, c'est-à-dire que du_1 est bien une différentielle exacte si et seulement si :

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} = \frac{\partial X}{\partial x_1}$$

on peut faire le même raisonnement pour du_2 ce qui donne la condition :

$$\frac{\partial Y}{\partial x_2} = \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1}$$

en dérivant la première condition par rapport à x_2 et la deuxième par rapport à x_1 , en les ajoutant membre à membre, puis en remplaçant $X + Y$ par $2\varepsilon_{12}$ on obtient¹ :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_2 \partial x_1}$$

Cette équation représente donc la condition nécessaire d'intégrabilité des déformations. Lorsqu'on part des expressions de déformations, celles-ci doivent vérifier cette équation, dite de compatibilité².

¹ On remarquera que cette illustration n'est pas rigoureuse, car au passage des dérivées secondes, on perd l'équivalence. Cela signifie que les fonctions de déplacement sont connues à une constante près, ce qui n'est pas gênant pour le calcul de déformation.

² En fait en dimension 2, on conserve soit la déformation soit la contrainte transverse, donc il y a deux équations de compatibilité. Nous n'en avons explicité qu'une pour alléger l'illustration.

On pourrait faire le même raisonnement dans le cas général en dimension 3. On obtient alors 6 équations de compatibilité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) \end{aligned}$$

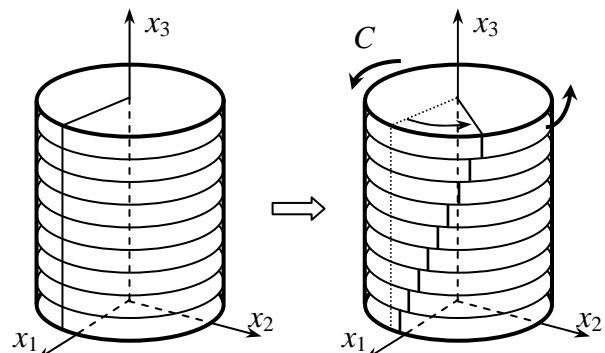
2 Exemples de résolution de problèmes

Nous allons illustrer la résolution de problèmes d'élasticité à partir d'exemples. Le choix des variables de départ : déplacement, déformation dépend du type de problème et de la connaissance que l'on peut en avoir a priori. Nous allons présenter tout d'abord deux exemples **partant des déplacements**, puis un exemple **partant des déformations**, dans le cas de l'élasticité plane.

2.1 Torsion d'un cylindre

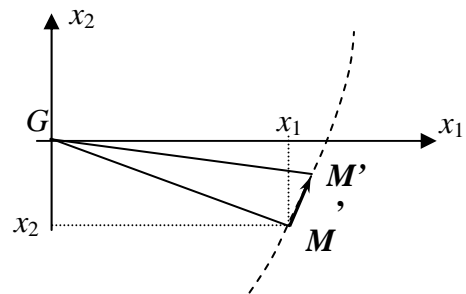
Section circulaire

Considérons un cylindre, porté par l'axe x_3 dont la section est circulaire de rayon r , sur lequel est exercé un couple C . Nous allons analyser le problème en partant du champ de déplacement. Pour cela des hypothèses provenant de l'observation doivent être posées. (i) Les sections droites restent droites (donc planes). (ii) Un point quelconque d'une section droite se déplace en effectuant une rotation autour de l'axe du cylindre. En fait, on peut assimiler le cylindre à un empilement de disques (cf. figure), tournant légèrement les uns par rapport aux autres. Ces hypothèses permettent d'esquisser l'allure du champ de déplacement $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$.



La composante du déplacement selon x_3 : u_3 est nulle.

Les composantes u_1 et u_2 peuvent alors être déterminées, en considérant le déplacement d'un point $M(x_1, x_2, x_3)$ en M' . Si l'on suppose que la base du cylindre est fixe, et que l'autre tourne (application du couple), la rotation d'une section droite va être proportionnelle à la distance par rapport à la base, x_3 , et à l'angle de rotation par unité de longueur du cylindre, θ . En émettant l'hypothèse de petits déplacements, et en appelant G le centre de gravité d'une section droite, le vecteur \overline{GM} est perpendiculaire au vecteur $\overline{MM'}$ (cf figure). Finalement, on obtient l'expression du champ de déplacement¹ :



$$\begin{cases} u_1 = -x_3 \cdot \theta \cdot x_2 \\ u_2 = x_3 \cdot \theta \cdot x_1 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

¹ On notera que les expressions des déplacements sont bien en mètres.

A partir des déplacements, on peut aisément calculer les déformations par dérivation : Après calcul le tenseur de déformation devient :

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\theta}{2}x_2 \\ 0 & 0 & \frac{\theta}{2}x_1 \\ -\frac{\theta}{2}x_2 & \frac{\theta}{2}x_1 & 0 \end{bmatrix}_{(x_1, x_2, x_3)}$$

De façon similaire en utilisant les équations de Lamé, on peut directement calculer le tenseur des contraintes, toujours dans le repère $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$:

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mu\theta x_2 \\ 0 & 0 & \mu\theta x_1 \\ -\mu\theta x_2 & \mu\theta x_1 & 0 \end{bmatrix}_{(x_1, x_2, x_3)}$$

Pour que le champ de déplacement proposé soit compatible avec le problème, il faut vérifier (i) les équations d'équilibre indéfinis et (ii) les équations d'équilibre aux limites.

En remplaçant les expressions des contraintes dans le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma_{13} = -\mu\theta x_2 \\ \sigma_{23} = \mu\theta x_1 \end{cases}$$

on constate qu'elles sont bien vérifiées.

Concernant les équations d'équilibre aux limites, deux types de surface limite sont à considérer : la surface cylindrique et les bouts du cylindre.

La première est une surface libre, car aucune force ne s'exerce sur le cylindre. L'équation à vérifier s'écrit donc :

$$\tilde{\sigma} \cdot \vec{n} = 0$$

Pour un point $M(x_1, x_2, x_3)$ appartenant à la surface extérieure (donc pour lequel

$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = R$), le vecteur unitaire normal à la surface a pour composantes :

$$\frac{1}{R} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul est donc :

$$\tilde{\sigma} \cdot \vec{n} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mu\theta x_2 \\ 0 & 0 & \mu\theta x_1 \\ -\mu\theta x_2 & \mu\theta x_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\mu\theta / R)(-x_1 x_2 + x_1 x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donc l'équation au limite est vérifiée sur le contour du cylindre.

La deuxième surface extérieure, a pour normale $n = x_3$, comme pour toute autre section droite. On va donc commencer par évaluer le vecteur contrainte $\vec{\phi}_n$ dans ces sections.

$$\vec{\phi}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mu\theta x_2 \\ 0 & 0 & \mu\theta x_1 \\ -\mu\theta x_2 & \mu\theta x_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu\theta x_2 \\ \mu\theta x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour ces facettes, le vecteur contrainte est dans le plan de la section. Cela signifie que la contrainte normale $\sigma_{nn} = 0$, et que le vecteur contrainte représente un cisaillement pur. D'autre part en écrivant le vecteur sous la forme :

$$\vec{\phi}_n = \mu\theta \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on constate immédiatement que le vecteur contrainte est perpendiculaire au rayon vecteur, et donc tangent au contour du cylindre. De plus le module de ce vecteur (égale à τ_{nt}) vaut :

$$\|\vec{\phi}_n\| = \tau_{nt} = \mu\theta\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \mu\theta r$$

où r est la distance à l'axe selon un rayon vecteur. Donc la contrainte de cisaillement est proportionnelle à la distance par rapport à l'axe.

On peut maintenant appliquer l'équation d'équilibre à l'extrémité sur laquelle s'exerce le couple C . Pour cela il faut que le couple appliqué suive la distribution des contraintes sur la surface. L'équation d'équilibre s'écrit donc (cf figure) :

$$\int_S (\vec{GM} \wedge \vec{\phi}_n) ds = \vec{C}$$

Soit :

$$\int_S \tau_{nt} r ds = C \quad \text{avec} \quad \tau_{nt} = \mu\theta r$$

En remplaçant τ_{nt} par sa valeur et en introduisant le moment d'inertie polaire :

$$I_G = \int_S r^2 ds$$

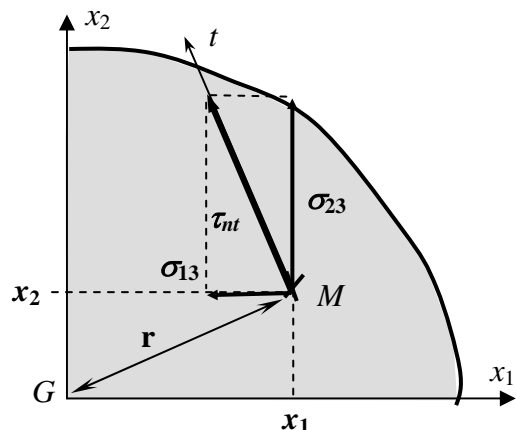
l'équation d'équilibre devient :

$$\mu\theta I_G = C$$

Donc la solution ne sera exacte que si le couple est appliqué selon la répartition des contraintes dans la section. En pratique, cette condition est difficile, voire impossible à réaliser, mais nous verrons plus loin en théorie des poutres qu'on peut s'en affranchir en appliquant un moment constant mais avec un cylindre plus long¹.

Sections quelconques

Généralisons ces résultats à un **cylindre dont la section serait quelconque**. Dans ce cas, la tangente n'est pas perpendiculaire au rayon vecteur. L'équation d'équilibre sur la surface ne serait plus respectée, car le vecteur contrainte ne serait pas tangent à la surface. Pour que cette



¹ Il s'agit du principe de St Venant.

condition devienne vraie, il faut modifier les hypothèses de départ. La section droite ne reste pas droite, mais se gauchit, c'est à dire qu'elle subit une composante de déplacement u_3 non uniforme, qui est également perpendiculaire à l'amplitude de torsion θ . On définit donc une fonction de gauchissement $\phi(x_1, x_2)$ ¹. Le champ de déplacement devient donc :

$$\begin{cases} u_1 = -x_2 \cdot \theta \cdot x_3 \\ u_2 = x_1 \cdot \theta \cdot x_3 \\ u_3 = \theta \cdot \phi(x_1, x_2) \end{cases}$$

Par dérivation, on obtient les déformations :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{33} &= 0 \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(-\theta x_2 + \theta \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\theta x_1 + \theta \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) \end{aligned}$$

En utilisant les équations de Lamé, on obtient le champ de contrainte :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{33} &= 0 \\ \sigma_{13} &= \mu \theta \left(-x_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) \quad \sigma_{23} = \mu \theta \left(x_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) \end{aligned}$$

Nous allons maintenant vérifier les équations d'équilibre indéfini :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma_{13} = \mu \theta \left(-x_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) \\ \sigma_{23} = \mu \theta \left(x_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) \end{cases}$$

En remplaçant, on constate que les deux premières équations sont vérifiées. La troisième équation devient :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 0 \Leftrightarrow \Delta \phi = 0$$

Donc les équations d'équilibre indéfini sont vérifiées si la fonction de gauchissement ϕ a son Laplacien nul. Cela fixe une première condition sur cette fonction pour qu'elle puisse être une solution du problème.

Appliquons les équations aux limites sur la surface libre du cylindre. Pour cela considérons un point du cylindre, et le vecteur normal \vec{n} en ce point.

$$\vec{n} \begin{pmatrix} \alpha_{h1} \\ \alpha_{h2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculons le vecteur contrainte sur la surface :

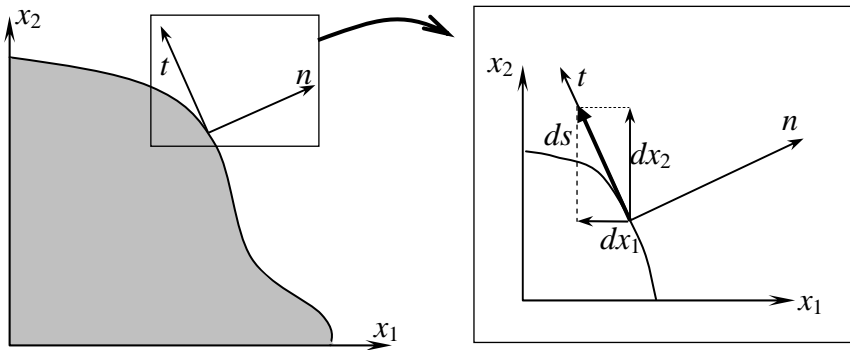
$$\vec{\phi}_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{h1} \\ \alpha_{h2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_{13} \cdot \alpha_{h1} + \sigma_{23} \cdot \alpha_{h2} \end{pmatrix}$$

¹ A ne pas confondre avec le vecteur contrainte.

En remplaçant les contraintes et les cosinus directeurs de n par leurs valeurs (cf. figure), et en écrivant que le vecteur contrainte est nul sur une surface libre on obtient :

$$\left(-x_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right) dx_2 - \left(x_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right) dx_1 = 0$$

c'est-à-dire une deuxième condition sur la fonction ϕ pour qu'elle soit solution du problème mécanique.



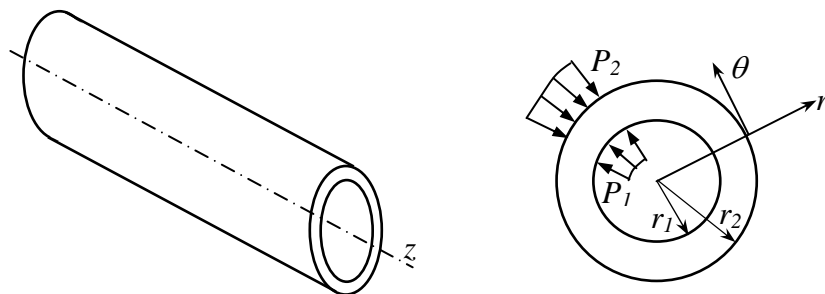
On peut également appliquer l'équation d'équilibre aux limites sur les bouts où s'applique le couple, que l'on peut encore considérer s'appliquer selon la distribution des contraintes.

Finalement, le problème pourra être résolu en trouvant une fonction ϕ qui satisfasse les deux conditions précédentes.

2.2 Tube épais soumis à une pression

Considérons un cylindre creux d'axe z , de rayons intérieur r_1 et extérieur r_2 , soumis à des pressions P_1 et P_2 sur les surfaces intérieure et extérieure respectivement. Nous allons encore partir des déplacements en les intuitant.

On va considérer un repère cylindrique (r, θ, z) qui du fait de la symétrie de l'objet et de la sollicitation extérieure va être le repère principal des contraintes et des déformations. Le bon sens et l'observation nous indiquent que dans une section droite, tous les points à une cote r (donc sur le cercle de rayon r) se déplacent de la même valeur $u(r)$.



Pour calculer le champ de déformation, nous allons partir de la définition de la déformation (cf. chapitre 1). On considère un point P , qui après transformation vient en P' (donc $PP' = u$). On considère un point N voisin de P , dans un premier temps dans la direction radiale (cf figure a), donc $PN = dr$. Le point N se transforme en N' , tel que $NN' = u + du$.

Par définition :

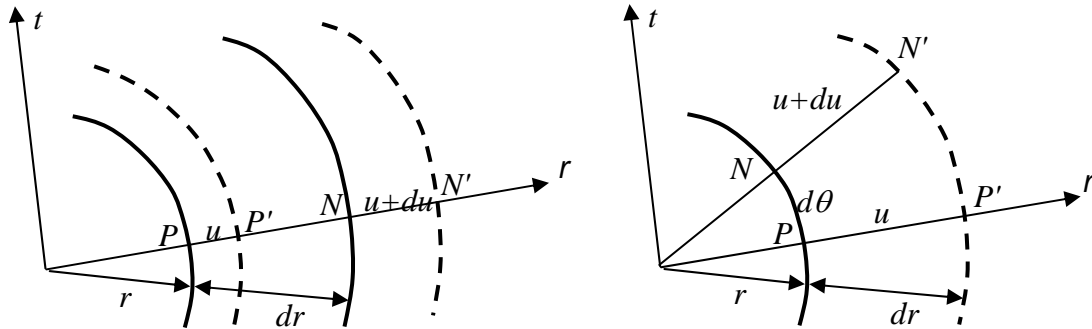
$$\varepsilon_r = \frac{P'N' - PN}{PN} = \frac{du}{dr}$$

On peut faire le même raisonnement pour deux points voisins de $d\theta$ (figure b), ce qui permet de calculer :

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

Ensuite par hypothèse, qu'il conviendra de vérifier ultérieurement, on considère la dilatation unitaire selon z comme constante :

$$\varepsilon_z = a$$



Le tenseur des déformations s'exprime donc selon :

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} du/dr & 0 & 0 \\ 0 & u/r & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}_{(r,\theta,z)}$$

Les contraintes peuvent être ensuite évaluées par les équations de Lamé, en reportant les valeurs précédentes des déformations. On obtient :

$$\sigma_r = \lambda \left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + a \right) + 2\mu \frac{du}{dr}$$

$$\sigma_\theta = \lambda \left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + a \right) + 2\mu \frac{u}{r}$$

$$\sigma_z = \lambda \left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + a \right) + 2\mu a$$

Tout comme les déformations, les contraintes ne dépendent que de la fonction $u(r)$ que l'on va pouvoir préciser en vérifiant les équations d'équilibre indéfini et aux limites.

En coordonnées cylindriques, les équations d'équilibre s'expriment selon :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0 \end{cases}$$

Dans le repère principal, ces équations se simplifient, car toutes les composantes de cisaillement sont nulles. De plus la deuxième et la troisième sont vérifiées car les fonctions σ_θ

et σ_z ne dépendent que de r donc leur dérivées par rapport à θ et z respectivement sont nulles. En remplaçant les expressions des contraintes dans la première équation on obtient :

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0$$

En réarrangeant elle peut s'écrire :

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(u \cdot r)}{dr} \right) = 0$$

Cette équation s'intègre facilement en introduisant deux constantes $C1$ et $C2$:

$$u(r) = \frac{C1}{2} \cdot r + \frac{C2}{r}$$

Les équations d'équilibre indéfini sont vérifiées à la condition que la fonction $u(r)$ ait la forme précédente.

Il est alors possible de reporter l'expression de $u(r)$ dans les contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_r = C1(\lambda + \mu) + \lambda a - \frac{2\mu C2}{r^2} \\ \sigma_\theta = C1(\lambda + \mu) + \lambda a + \frac{2\mu C2}{r^2} \\ \sigma_z = C1\lambda + a(\lambda + 2\mu) \end{cases}$$

On peut introduire de nouvelles constantes pour simplifier l'écriture :

$$\begin{cases} \sigma_r = A - \frac{B}{r^2} \\ \sigma_\theta = A + \frac{B}{r^2} \\ \sigma_z = C \end{cases}$$

Les constantes A , B et C peuvent être déterminées en écrivant les équations d'équilibre aux limites :

$$\text{En } r_1 : \tilde{\sigma} \cdot \vec{r} = -P_1 \cdot \vec{r} \Leftrightarrow \sigma_r(r_1) = -P_1$$

$$\text{En } r_2 : \tilde{\sigma} \cdot (-\vec{r}) = P_2 \cdot \vec{r} \Leftrightarrow \sigma_r(r_2) = -P_2$$

En calculant on obtient :

$$A = \frac{P_1 r_1^2 - P_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad B = \frac{P_1 - P_2}{r_2^2 - r_1^2} r_1^2 r_2^2$$

Pour calculer la contrainte axiale σ_z , et donc la constante C , il faut préciser les conditions aux limites sur les extrémités du tube. On peut imaginer différentes hypothèses : (a) tube fermé, donc subissant les pressions P_1 et P_2 , (b) tube bloqué aux extrémités, c'est-à-dire pour lequel on empêche l'allongement, (c) tube soumis à une traction etc. Ces différentes conditions imposent des limites différentes mais dont le principe est similaire.

Dans le premier exemple le tube est soumis à un effort de traction égal à :

$$-F = P_2 (\pi r_2^2) - P_1 (\pi r_1^2)$$

qui s'exerce sur une section droite de surface S :

$$S = \pi(r_2^2 - r_1^2)$$

La constante C est donc égale au rapport F/S .

Le deuxième cas bloqué implique que $\varepsilon_z = 0$. La condition aux limites va donc s'exprimer sur la déformation longitudinale. Le dernier cas est similaire au premier en écrivant que la contrainte est égale au rapport de la force de traction sur la section droite.

2.3 Elasticité plane

On considère que notre problème peut être analysé en termes de contraintes dans le plan (x_1, x_2) . Cela signifie que σ_{13} , σ_{23} et σ_{33} sont nulles, et que les composantes σ_{12} , σ_{22} et σ_{11} sont uniquement fonctions des variables x_1 et x_2 . On parle alors d'un problème en contrainte plane. Le tenseur des contraintes est donc de la forme :

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x_1, x_2, x_3)}$$

A partir de la loi de Hooke, on obtient les déformations suivantes, fonctions des variables x_1 et x_2 :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu \cdot \sigma_{22}) & \varepsilon_{12} &= \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{12} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu \cdot \sigma_{11}) \\ \varepsilon_{33} &= \frac{-\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{aligned}$$

Nous allons développer une méthode de résolution de problèmes plans en partant du champ de déformation. Nous devons donc vérifier l'équation de compatibilité :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Exprimons cette équation à partir des contraintes en remplaçant par les relations de Hooke. On obtient la relation suivante :

$$\Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - (1+\nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} \right) = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

où Δ représente l'opérateur Laplacien. On obtient donc une équation que doivent vérifier les contraintes.

Comme les contraintes doivent également vérifier les équations d'équilibre pour tout problème, nous allons les introduire dans l'équation précédente afin d'obtenir une forme qui tient compte à la fois des équations de compatibilité et des équations d'équilibre indéfini. Nous allons voir que cela permet en fait de simplifier l'expression précédente.

En deux dimensions, nous avons seulement deux équations d'équilibre indéfini (projections des forces selon x_1 et selon x_2) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

En dérivant ces deux équations par rapport à x_1 et x_2 respectivement et en remplaçant dans l'équation de compatibilité exprimée avec les contraintes, on obtient :

$$\Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0$$

Finalement résoudre un problème d'élasticité dimensionnel revient à trouver trois fonctions σ_{13} , σ_{23} et σ_{33} qui satisfont l'équation précédente et l'équation d'équilibre indéfini.

Pour résoudre le problème de manière générique, Airy¹ a proposé d'introduire une nouvelle fonction ϕ^2 qui permet de satisfaire les équations d'équilibre si on l'introduit de la manière suivante,

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_1}$$

ce que l'on constate aisément.

On peut alors remplacer la fonction d'Airy dans l'équation de compatibilité (transformée), ce qui donne :

$$\Delta(\Delta\phi) = 0$$

En conclusion, pour résoudre un problème plan, il suffit de "trouver" une fonction $\phi(x_1, x_2)$, vérifiant l'équation précédente et les équilibres aux limites du problème trouvé. En pratique, on définit une fonction comportant un certain nombre de constantes que l'on ajustera avec les équations d'équilibre aux limites.

Cette méthode par la fonction d'Airy a donné de nombreuses solutions, notamment à partir de fonctions analytiques, pouvant être assez compliquées, mais initialement, Airy avait étudié des fonctions polynomiales.

A titre d'exemple considérons la fonction :

$$\phi = b \frac{x_2^2}{2}$$

L'équation est vérifiée et on obtient le tenseur des contraintes :

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x_1, x_2, x_3)}$$

Cela correspond à une traction (ou une compression) uniaxiale selon l'axe x_1 . La constante peut ensuite être déterminée à partir de l'équation d'équilibre sur la surface limite. Par exemple une force F s'exerçant sur une section S , donnant $b = F/S$.

¹ Sir George Biddell Airy (1801-1892) a participé au développement mathématique de la théorie de l'élasticité, à Cambridge.

² Il va sans dire que cette fonction d'Airy n'a en dépit de la notation aucun rapport avec la fonction de gauchissement introduite pour la torsion.

Prenons comme deuxième exemple la fonction :

$$\phi = -bx_1x_2$$

Après avoir noté qu'elle vérifie l'équation $\Delta\Delta\phi = 0$, on peut calculer le tenseur des contraintes

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x_1, x_2, x_3)}$$

qui correspond à un état de cisaillement pur.

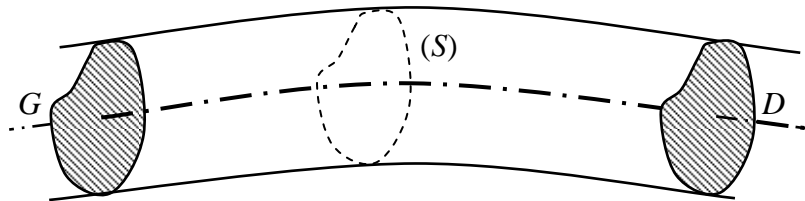
3 Résistance des matériaux : poutres

Comme l'application des équations de l'élasticité à des problèmes concrets peut s'avérer rapidement ardue, des théories simplifiées ont été développées pour permettre des calculs analytiques systématiques. C'est le cas des poutres ou des coques qui voient de nombreuses applications dans la vie courante. Pour arriver à de tels résultats, il est bien sûr nécessaire de poser des hypothèses simplificatrices. Cela entraîne des limites dans l'utilisation de ces théories qu'il convient de bien garder à l'esprit. Par exemple dans le cas de la théorie des poutres que nous allons introduire dans ce chapitre, il faut être très prudent lorsqu'on extrapole des résultats à des géométries qui s'éloignent de poutres.

3.1 Définitions, principes et hypothèses

Par **définition** nous appellerons poutre un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre de gravité décrit une courbe GD , appelé ligne moyenne; le plan de la section restant perpendiculaire à cette ligne (cf figure). Afin de vérifier un certain nombre d'hypothèses que nous présenterons plus loin, il faut introduire quelques restrictions à cette définition.

- Le rayon de courbure de la ligne GD doit être grand par rapport aux dimensions de la section.
- La longueur de la poutre est grande par rapport aux dimensions de la section.
- La variation éventuelle de la section doit rester faible et continue.



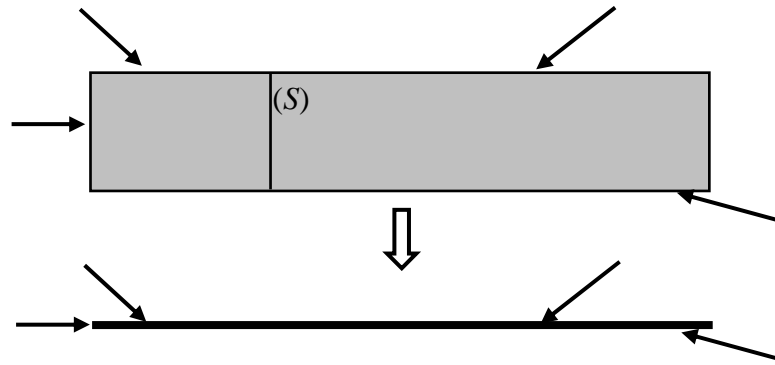
Insistons sur le fait qu'il convient d'être prudent sur des résultats chaque fois où un de ces critères n'est pas objectivement bien vérifié.

Principe de calcul des poutres

Les champs de contrainte ou de déformation dans une section droite (S) d'une poutre sont évalués directement par la résultante du torseur des efforts (force et moment) situés d'un des côtés de la section. Donc pour évaluer l'ensemble du champ de contrainte (ou de déformation) de la poutre, il suffit de calculer l'évolution de ce torseur en fonction de l'abscisse le long de GD .

De plus, on va représenter la poutre par sa seule ligne moyenne, en supposant donc que tous les efforts appliqués à la poutre le sont sur la ligne moyenne (cf figure). Le calcul de contrainte de la section sera alors obtenue à partir du torseur résultant sur la ligne moyenne et des caractéristiques de la section.

On comprend alors qu'un tel principe permet un calcul simple de toute poutre.



Hypothèses fondamentales

Pour effectuer ces calculs simplifiés, quatre hypothèses fondamentales sont posées comme base de départ.

- (a) Les déformations sont suffisamment petites pour que l'on puisse les négliger dans l'écriture des équations d'équilibres. Cela signifie que les calculs sont effectués sur les poutres au repos. La conséquence est notamment que l'on ne tient pas compte d'un léger décalage ou d'une rotation des forces appliquées dans le calcul.
- (b) On considère que les poutres suivent la loi de Hooke, c'est-à-dire qu'il y a proportionnalité entre contrainte et déformation, ou bien entre force et déplacement. Cela implique que les contraintes et les déformations dues à plusieurs systèmes de charges appliqués simultanément sont identiques à la somme des contraintes et déformations dues aux différentes charges agissant isolément. On verra plus loin que cette hypothèse permet une écriture matricielle d'une poutre chargée, assez pratique.
- (c) Les contraintes dans une section **éloignée** des points d'application des forces extérieures ne dépendent que de la résultante générale et du moment. On considère que ces résultats sont applicables dès que la distance d'une section par rapport au point d'application de la charge la plus voisine est supérieure à la dimension caractéristique de la section. Cette hypothèse, connue sous le nom de principe de St Venant¹ est d'une grande importance en mécanique, puisqu'elle permet de fixer toutes les conditions aux limites réelles².
- (d) La dernière hypothèse, connue sous le principe de Bernoulli stipule que les sections droites d'une poutre restent planes lors de la déformation, ce qui veut dire qu'il n'y a pas de gauchissement et que ces sections subissent une simple rotation. Nous aurons l'occasion de revenir amplement sur cette hypothèse qui nous permettra d'évaluer les déformations et contraintes de flexion dans une poutre.

¹ St Venant (1797-1886) a illustré ce principe en considérant une barre de caoutchouc pincée dans les mâchoires d'une paire de tenailles. Les deux forces opposées agissant sur le caoutchouc produisent une déformation significative, uniquement dans une zone proche des mâchoires, le reste de la barre n'étant pas affecté.

² C'est notamment le cas des solutions où on est obligé de considérer que la force appliquée doit suivre la distribution des contraintes à la surface (cf torsion, flexion d'une barre par les fonctions d'Airy etc.). En déportant la force réelle par rapport à la section où l'on souhaite que le calcul soit exact, on satisfait aux équations d'équilibre. On notera que c'est notamment avec ce principe que l'on justifie la forme des éprouvettes de traction en haltère.

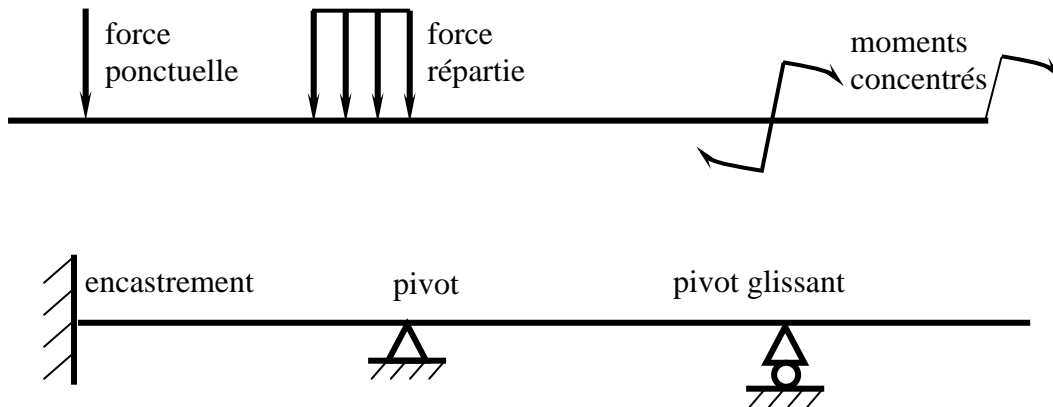
Types d'efforts

Les conditions aux limites sont appliquées aux poutres en termes d'efforts et de déplacements. En résistance des matériaux, on parle souvent d'efforts au sens général, c'est-à-dire en incluant des forces et des moments (ou des couples de forces). Il en va de même pour les déplacements qui peuvent représenter des variations de longueur ou bien d'angles (rotation). On verra plus loin que l'on pourra associer un déplacement à une force et une rotation à un moment.

On considérera des forces ponctuelles, et des forces réparties, c'est-à-dire des forces par unité de longueur (cf figure). De façon identique, on va considérer des moments dits concentrés, c'est-à-dire s'appliquant en un point.

Les conditions aux limites sur les déplacements représentent généralement des bloquages de déplacement ou de rotation (liaisons). Pour des poutres planes chargées dans leur plan, on considère couramment les liaisons suivantes (cf figure) :

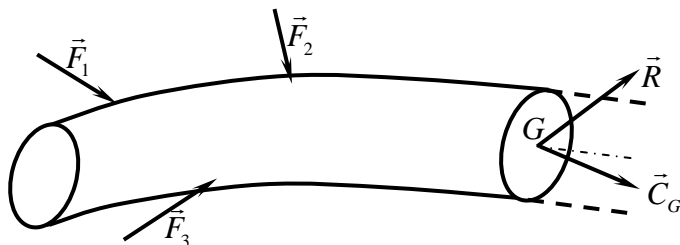
- encastrement : toute rotation et tout déplacement nuls
- pivot simple : tout déplacement empêché, et toute rotation libre
- pivot glissant : un seul déplacement empêché et toute rotation libre.



3.2 Diagramme fondamental

Torseur des efforts et définition :

Le principe de calcul consiste à évaluer au centre de gravité d'une section droite donnée, le torseur résultant des efforts de gauche (ou de droite de la poutre¹). Ce torseur est composé de la force résultante \vec{R} et du couple résultant \vec{C}_G (cf figure). De façon similaire à ce que l'on a présenté dans les généralités sur l'élasticité, il est pratique de décomposer ce torseur selon un repère lié à la facette en composantes normales et tangentielles.



¹ Les torseurs résultants de droite et de gauche sont bien sûr opposés. En pratique (et de manière tout-à-fait arbitraire, on considérera le torseur de gauche dans la suite du texte).

La composante normale de l'effort résultant est appelée effort normal (on la notera N) et la composante tangentielle **effort tranchant** (notée T). La composante normale du couple résultant est un moment de torsion (noté Mt) et la composante tangentielle est un moment qui induit une rotation perpendiculaire à l'axe de la poutre, nommée **moment fléchissant** (noté Mf)

En définissant un repère (O,x,y,z) , tel que l'axe z soit porté par la ligne moyenne de la poutre, les composantes normales sont orientées selon z et les composantes tangentielles vont chacune se décomposer en deux parties selon x et y . Finalement dans un tel repère, le torseur résultant s'exprime selon :

$$\vec{R} \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ N_z \end{pmatrix} \quad \vec{C}_G \begin{pmatrix} Mf_x \\ Mf_y \\ Mt_z \end{pmatrix}$$

Nous avons déjà dit que les contraintes et les déformations vont être évaluées à partir de ce torseur en un point d'abscisse z . Donc pour calculer les déformations de l'ensemble de la poutre, nous allons évaluer l'évolution du torseur (de ses composantes) en fonction de l'abscisse le long de la poutre. Cette évolution est appelée **diagramme fondamental**.

Evaluation du diagramme fondamental : Méthodologie

Pour évaluer le diagramme fondamental, il convient de suivre une procédure logique :

(1) bilan des efforts extérieurs, incluant forces appliquées et réactions. Ces dernières représentent des inconnues qu'il va falloir déterminer. Pour cela, nous appliquons le théorème fondamental d'un système mécanique en équilibre, à savoir la somme des forces extérieures et la somme des moments de ces forces extérieures par rapport à un point quelconque sont nulles. Cependant deux cas de figure peuvent se présenter.

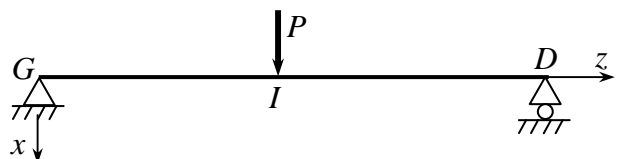
Soit le nombre de réactions (composantes) inconnues est égal au nombre d'équations¹ d'équilibre (6 équations au maximum, lorsqu'on projette sur les trois axes), on parle alors de **système isostatique** que l'on peut directement résoudre. Soit le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations, on parle de **système hyperstatique**, que l'on ne peut pas résoudre directement. Nous présenterons dans le chapitre 4 une méthode de résolution particulière pour de tels systèmes hyperstatiques.

(2) Calcul effectif de toutes les réactions.

(3) Calcul des résultantes des efforts de gauche, c'est-à-dire du diagramme fondamental.

Exemple sur un cas simple.

Avant de démontrer des relations analytiques générales pour la détermination des résultantes du torseur, nous allons illustrer le principe de calcul sur un cas simple, en effectuant simplement un bilan des forces. Pour cela, considérons une poutre droite de ligne moyenne GD , de longueur L , disposée sur un appui glissant à une extrémité et un



¹ On ne tient compte que des équations des projections des forces selon un axe pour lequel il y a effectivement des efforts non nuls.

pivot à l'autre extrémité. La poutre est chargée en son centre I d'une force \vec{P} (cf. figure).

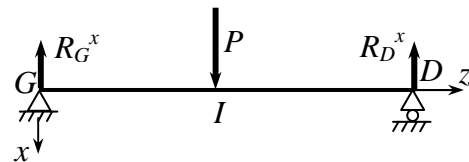
Nous avons donc affaire à une poutre droite chargée dans le plan (x,z) . La liaison de gauche autorise seulement une rotation autour de y et la liaison de droite une rotation autour de y et un déplacement selon z . En conséquence, compte tenu de la direction de l'effort \vec{P} appliqué selon x , il y a deux réactions inconnues que nous appellerons \vec{R}_G et \vec{R}_D . Nous pouvons appliquer les équations d'équilibres ie. la somme des forces et la somme des moments des forces par rapport à un point égales à 0.

$$\begin{cases} \vec{P} + \vec{R}_G + \vec{R}_D = 0 \\ O\vec{I} \wedge \vec{P} + O\vec{G} \wedge \vec{R}_G + O\vec{D} \wedge \vec{R}_D = 0 \end{cases}$$

Ce système qui comporte au maximum 6 équations se ramène dans l'exemple présent à 2 équations non triviales : projection des forces selon l'axe x et projection des moments par rapport à un point selon y . Si l'on prend G (cela nous permet d'éliminer une inconnue dans une des deux équations) pour le calcul des moments, le système devient :

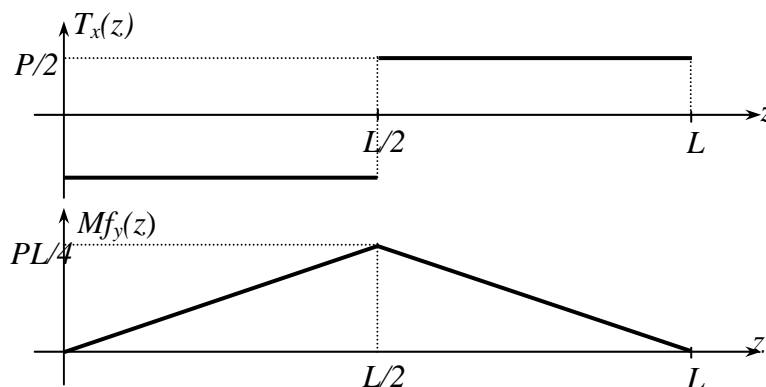
$$\begin{cases} R_G^x + P + R_D^x = 0 \\ (L/2) \cdot P + L \cdot R_D^x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_G^x = -P/2 \\ R_D^x = -P/2 \end{cases}$$

et peut être résolu directement¹.



Le diagramme fondamental de \vec{R} et \vec{C}_G va donc comporter deux composantes T_x et Mf_y que l'on va évaluer en fonction de z . Pour évaluer l'effort tranchant pour des valeurs de z comprises dans l'intervalle $[0 ; L/2]$, il suffit de reprendre la somme des efforts à gauche de la poutre, soit ici $-P/2$. Puis dans l'intervalle $[L/2 ; L]$, on ajoute P , donc la valeur est constante et égale à $P/2$. On agit de même pour le moment fléchissant². En se plaçant en z dans l'intervalle $[0 ; L/2]$, on a seulement la réaction R_G^x à la distance $(-z)$, donc le moment est $Mf_y(z) = (P/2)z$. Finalement, on obtient le diagramme suivant :

z	0	$L/2$	L
$T_x(z)$		$-P/2$	$P/2$
$Mf_y(z)$		$(P/2)z$	$(-P/2)z + P/2L$



¹ Nous avons affaire ici à un cas particulier, car symétrique. En conséquence, on dispose en fait d'une équation supplémentaire fixant la symétrie. Nous posons néanmoins les deux équations d'équilibre par souci d'illustration.

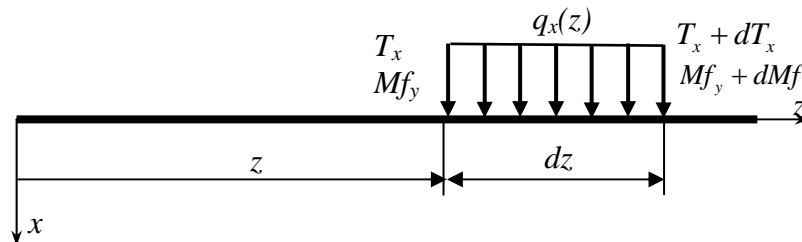
² Le moment est défini comme le produit vectoriel de la distance par la force. Ici, la distance est selon z et la force selon x , soit un repère direct, donc il suffit de faire le produit des valeurs algébriques de la distance et de la force.

Ce calcul peut être mené de la même manière pour toute poutre. Cependant, en présence de charges réparties, le calcul devient plus fastidieux, notamment au niveau du moment. Nous allons donc établir des relations générales entre charges réparties, effort tranchant et moment fléchissant.

Relations générales entre effort tranchant et moment fléchissant.

Considérons une poutre droite chargée uniquement selon la direction x (donc dans le plan xz), sur laquelle se trouve une charge répartie $q_x(z)$ de z à $z + dz$ (cf **figure**). Nous allons donc considérer les composantes des forces et des moments.

De part et d'autre de cette charge répartie on a les efforts tranchants et les moments fléchissants : En z : T_x et Mf_y et en $z + dz$: $T_x + dT_x$ et $Mf_y + dMf_y$.



Exprimons l'effort tranchant en $z + dz$:

$$T_x + dT_x = T_x + q_x(z) \cdot dz$$

En simplifiant, on obtient :

$$\frac{dT_x}{dz} = q_x(z)$$

De la même façon exprimons le moment fléchissant en $z + dz$:

$$Mf_y + dMf_y = Mf_y + (-dz) \cdot T_x + (-dz/2) \cdot q_x(z) \cdot dz$$

En simplifiant et en négligeant les infiniment petits d'ordre 2, on obtient :

$$\frac{dMf_y}{dz} = -T_x$$

Donc par intégrations successives, on peut évaluer le diagramme fondamental à partir du chargement réparti. Les constantes d'intégration pouvant être déterminées à partir des conditions aux limites (continuité et valeurs connues)

Toujours dans le même repère, mais avec un autre chargement selon la direction y , on montrerait de la même manière :

$$\frac{dT_y}{dz} = q_y(z) \quad \text{et} \quad \frac{dMf_x}{dz} = T_y$$

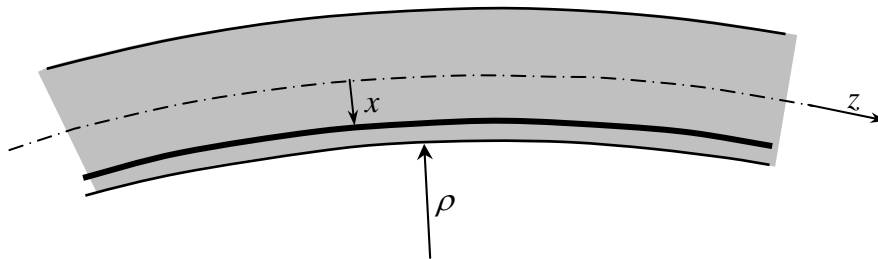
3.3 Contraintes et déformations - formule de Bresse

Contrainte et déformation de flexion

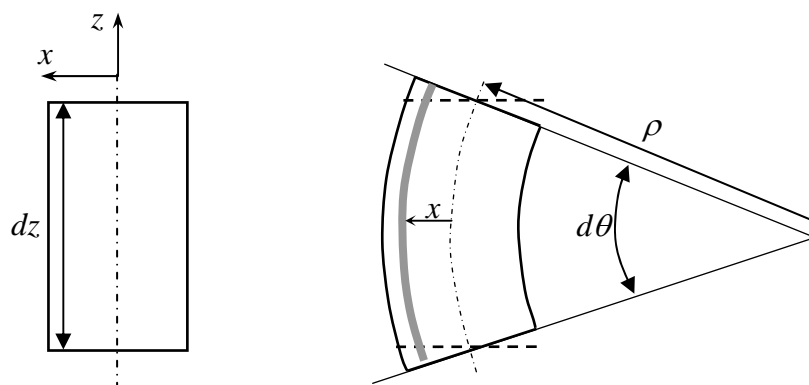
L'aspect sans doute le plus important de la mécanique des poutres est celui de la flexion. Historiquement, le problème de la résistance, de la déformée et de l'état de contrainte a été abordé sur plusieurs siècles. Si d'éminents esprits comme Galilee, Hooke, Mariotte et

Bernouilli, pour ne citer que les plus connus ont longuement réfléchi à ce problème sans toujours trouver la solution, cela signifie qu'elle n'est pas triviale. Nous allons montrer cependant qu'en partant des bonnes hypothèses, l'évaluation du champ de déformation n'est pas très difficile.

Nous avons déjà mentionné l'hypothèse de Bernouilli qui stipule qu'une section droite restait droite et ne subissait qu'une rotation autour d'un axe parallèle à la section passant par l'axe moyen de la poutre¹. Nous allons considérer un segment de poutre soumise à seulement un moment fléchissant Mf_y constant². Dans ce cas l'axe neutre du segment présente une courbure constante de rayon ρ (cf. figure).



Imaginons que la poutre soit composée d'un empilement de fibres parallèles à l'axe neutre et considérons en une, située à une cote x . Par un raisonnement géométrique, on constate que cette fibre subit un allongement, proportionnel à cette distance x par rapport à l'axe, donc une déformation dans la direction z : ϵ_{zz} .



Afin d'évaluer cette déformation, considérons (cf figure) un segment de poutre de longueur dz (donc une fibre de longueur dz). En rappelant que pour rester dans les hypothèses des poutres, le rayon de courbure doit être important, notamment vis-à-vis de l'épaisseur, on peut écrire :

$$\rho \cdot d\theta \approx dz$$

de plus comme la déformation de la fibre s'exprime selon :

$$\epsilon_{zz} \approx \frac{xd\theta}{dz}$$

Cette déformation s'exprime directement en fonction du rayon :

$$\epsilon_{zz} \approx \frac{x}{\rho}$$

¹ En fait on devrait parler d'axe neutre, axe le long duquel les déformations et les contraintes longitudinales sont nulles. Dans le cas d'une poutre (élastique) symétrique, l'axe neutre est confondu avec l'axe moyen.

² On pourra facilement vérifier que c'est le cas avec un essai de flexion 4 points, entre les points d'appui intérieurs.

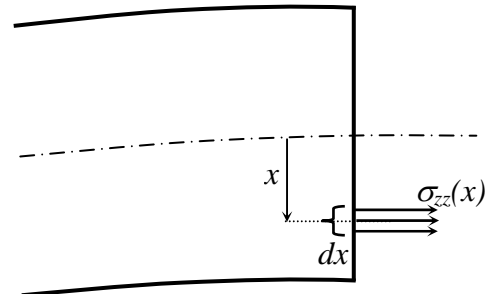
Cette relation est intéressante car elle peut être directement utilisée dans certains cas pour déterminer expérimentalement des champs de déformation de poutres par mesure du rayon de courbure.

En appliquant la loi de Hooke, on peut alors calculer le champ de contrainte en fonction du rayon de courbure.

$$\sigma_{zz} = \frac{E \cdot x}{\rho}$$

Pour relier le rayon de courbure au moment fléchissant, nous allons écrire l'équation générale d'équilibre des forces sur une section, i.e. la somme des projections des forces selon x et la somme des moments par rapport au centre de gravité de la section des forces selon y (cf figure):

$$\int_s \sigma_{zz} ds = 0 \quad \text{et} \quad \int_s \sigma_{zz} \cdot x \cdot ds = Mf_y$$



La première équation est automatiquement vérifiée pour une poutre symétrique par rapport à l'axe y^1 . En remplaçant σ_{zz} la deuxième équation conduit à :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{Mf_y}{E \cdot I_y} \quad \text{avec} \quad I_y = \int_s x^2 ds$$

Cette équation reliant le rayon de courbure au moment fléchissant en un point z de la poutre permet de calculer la déformée, si l'on relie le rayon de courbure à la dérivée seconde du déplacement par rapport à z . En effet lorsque le rayon de courbure n'est pas trop petit (la courbure pas trop grande), on peut écrire :

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \quad \text{donnant}^2 : \quad \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = -\frac{Mf_y}{E \cdot I_y}$$

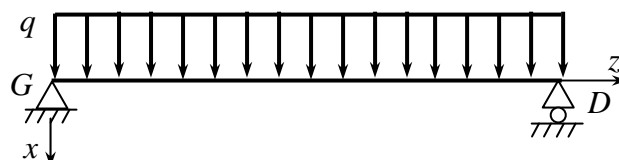
Cette équation connue sous le nom de **formule de Bresse** permet par intégrations successives, et en tenant compte des conditions aux limites de calculer la déformée de la poutre en fonction de z .

De manière symétrique en présence d'un moment fléchissant Mf_x , on obtient une flexion autour de l'axe x , dont l'équation est donnée par :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{Mf_x}{E \cdot I_x}$$

Exemple d'application

Considérons une poutre de longueur L , comportant une charge répartie constante de valeur q .



¹ Lorsque la poutre n'est pas symétrique, ou bien pour des systèmes plus complexes (comportements dissymétriques traction/compression etc.), cette équation donne la position de l'axe neutre.

² Mathématiquement le rayon de courbure est toujours défini de façon positive, cependant dans ce cas pour conserver une courbure correcte (rayon maximal en traction), il est nécessaire de considérer ce rayon de façon algébrique, donc opposé à la courbure.

Les forces de réactions se réduisent aux deux composantes selon x :

$$R_G^x = R_D^x = -qL/2$$

Le diagramme fondamental (2 composantes) est obtenu à partir de l'intégration des équations générales :

$$\frac{dT_x(z)}{dz} = q \quad \text{et} \quad \frac{dMf_y}{dz} = -T_x(z)$$

z	0	L
$T_x(z)$	$q \cdot z - qL/2$	
$Mf_y(z)$	$-qz^2/2 + qL/2 \cdot z$	

Appliquons la formule de Bresse pour calculer la déformée de la poutre $x(z)$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = -\frac{Mf_y}{E \cdot I_y}$$

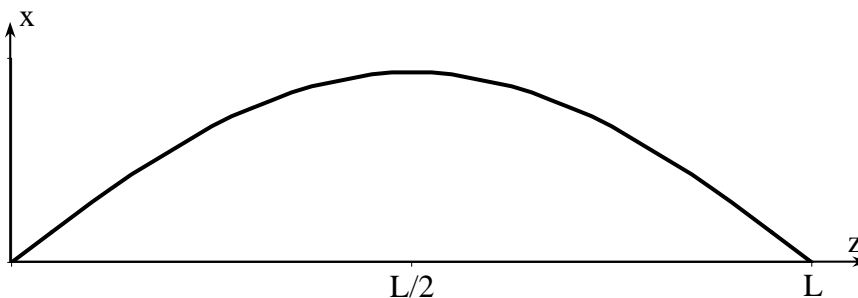
En intégrant deux fois, on obtient le déplacement de chaque point :

$$x \cdot E \cdot I_y = \frac{q}{24} z^4 - \frac{qL}{12} z^3 + C1z + C2$$

Les constantes d'intégration peuvent être évaluées à partir des conditions aux limites, à savoir : $x(z=0) = 0$ et $x(z=L) = 0$ sur les appuis. Donc $C2 = 0$ et l'équation de la déformée est :

$$x \cdot E \cdot I_y = \frac{q}{24} z^4 - \frac{qL}{12} z^3 + \frac{qL^3}{24} z$$

et on l'a représentée sur la figure suivante :



Champ de contrainte – torseur de gauche

D'après l'hypothèse de Saint Venant, on néglige toute composante sur les plans perpendiculaires, c'est-à-dire que $\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0$. Le tenseur des contraintes dans une section droite a donc l'allure :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$$

Analysons tout d'abord la contrainte normale.

Nous avons vu ci-dessus qu'elle était liée à un moment fléchissant Mf_y . En reliant les expressions de la contrainte et du moment et en éliminant le rayon de courbure, on obtient :

$$\sigma_{zz}(x, z) = \frac{Mf_y(z)}{I_y} \cdot x$$

De manière symétrique, un moment fléchissant autour de x va induire une contribution à la composante normale, selon :

$$\sigma_{zz}(y, z) = -\frac{Mf_x(z)}{I_x} \cdot y$$

Lorsque les deux composantes du moment fléchissant sont présentes, on parle de **flexion déviée**.

Evidemment la composante normale de l'effort résultant induit une contrainte normale, qui s'exprime simplement :

$$\sigma_{zz}(z) = -\frac{N_z(z)}{S}$$

Analysons les contraintes de cisaillement.

Elles dépendent des moments de torsion et des efforts tranchants. Le cas particulier de la composante normale du couple résultant, i.e. le moment de torsion est facile à analyser puisque nous avons établi les relations dans le premier chapitre consacré à la torsion. Nous rappelons simplement les relations en tenant compte des notations utilisées avec les poutres :

$$\sigma_{xz}(y, z) = \frac{Mt_z(z)}{I_G} \cdot y \quad \text{et} \quad \sigma_{yz}(x, z) = -\frac{Mt_z(z)}{I_G} \cdot x$$

Les efforts tranchants induisent une contributions aux contraintes de cisaillement. Comme pour de nombreuses applications de la RDM dans les calculs de structures, le cisaillement est souvent faible, on peut se contenter de valeurs de cisaillement moyen :

$$\sigma_{xz}(z) = -\frac{T_x(z)}{S} \quad \text{et} \quad \sigma_{yz}(z) = -\frac{T_y(z)}{S}$$

On notera que ces valeurs moyennes ne respectent pas les conditions aux limites sur les surfaces libres, puisque les cisaillement devraient être nuls sur les bords des poutres. En fait une analyse plus fine montre que la contrainte de cisaillement varie selon une parabole, avec une valeur maximale au centre et nulle sur les bords (le développement plus précis est donné en annexe).

Finalement, on peut résumer l'expression des contraintes dans une section droite, en fonction des composantes du torseur résultant des efforts de gauche :

$$\begin{cases} \sigma_{zz} = -\frac{N_z}{S} - \frac{Mf_x}{I_x} \cdot y + \frac{Mf_y}{I_y} \cdot x \\ \sigma_{xz} = -\frac{T_x}{S} + \frac{Mt_z}{I_G} \cdot y \\ \sigma_{yz} = -\frac{T_y}{S} - \frac{Mt_z}{I_G} \cdot x \end{cases}$$

Les expressions montrent que le champ de contrainte n'est pas homogène. Dans le cas général, le tenseur des contraintes dépend des 3 variables x , y et z . Pour une poutre respectant les hypothèses des poutres définies dans la première partie, les contraintes normales sont très supérieures aux contraintes de cisaillement, qui sont alors négligées (cf. exemple suivant).

Exemple d'application.

Reprenons l'exemple de la poutre soumise à une flexion 3 points (cf p.28). Supposons également que la section droite est circulaire de rayon R . Nous allons calculer les contraintes et montrer que la contrainte tangentielle est faible par rapport à la contrainte normale. Dans le cas présent, seules deux composantes du torseur de gauche sont non-nulles : Mf_y et T_x .

L'expression des contraintes est donc :

$$\sigma_{zz} = \frac{Mf_y}{I_y} \cdot x \quad \text{et} \quad \sigma_{xz} = -\frac{T_x}{S}$$

$$\text{avec } I_y = \frac{\pi R^4}{4} \quad \text{et} \quad S = \pi R^2$$

Dans le domaine $[0 ; L/2]$, nous avons montré que les composantes des efforts de gauches sont : $Mf_y = (P/2)z$ et $T_x = -P/2$.

En reportant dans les expressions et en simplifiant, les contraintes sont :

$$\sigma_{zz} = \frac{2P}{\pi R^4} \cdot x \cdot z \quad \text{et} \quad \sigma_{xz} = \frac{P}{2\pi R^2}$$

En un point de la section, la contrainte normale varie linéairement et est nulle au centre. La valeur maximale est obtenue pour $x = R$ et $z = L/2$. La contrainte tangentielle est bien évidemment constante dans la section puisque nous avons utilisé une expression simplifiée donnant une valeur moyenne. De plus dans cet exemple, elle est constante sur la longueur de la poutre.

Calculons le rapport entre la contrainte normale maximale et la contrainte tangentielle :

$$\frac{\sigma_{xz}}{\sigma_{zz}} = \frac{1}{2} \frac{R}{L}$$

Plus la poutre est allongée, plus la contrainte tangentielle est négligeable. Dans la pratique, on peut donc la négliger, mais il faut faire attention lorsqu'on utilise ces relations en les appliquant à des poutres trop compactes, ou à des matériaux très sensibles au cisaillement.

3.4 Calculs énergétiques

Un problème courant en RDM consiste à calculer le déplacement en un point sur une poutre. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de calculer l'ensemble de la déformée de la poutre. La variable conjuguée de la force étant le déplacement (du point de vue énergétique), nous allons détailler différentes méthodes énergétiques basées sur les principes généraux de conservation de l'énergie et du travail.

Energie élastique

Nous avons déjà rappelé que dans le domaine élastique, l'énergie par unité de volume d'une structure sous contrainte (avec $\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0$) s'exprime selon :

$$W^v = \frac{\sigma_{zz}^2}{2E} + \frac{1}{2G} (\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)$$

Nous allons évaluer l'énergie dans une section droite, en intégrant sur la surface, pour obtenir une énergie par unité de longueur de poutre.

$$W^l = \frac{1}{2E} \int_s \sigma_{zz}^2 ds + \frac{1}{2G} \int_s (\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2) ds$$

Remplaçons alors les contraintes par leurs valeurs en fonction des composantes du torseur de gauche et des caractéristiques géométriques de la section dans le premier terme de l'énergie (on notera que pour des sections symétriques, les termes croisés disparaissent laissant seulement les termes carrés):

$$\frac{1}{2E} \left(\frac{N_z^2}{S^2} \int_s ds + \frac{Mf_y^2}{I_y^2} \int_s x^2 ds + \frac{Mf_x^2}{I_x^2} \int_s y^2 ds \right) = \frac{1}{2E} \left(\frac{N_z^2}{S} + \frac{Mf_y^2}{I_y} + \frac{Mf_x^2}{I_x} \right)$$

Faisons de même pour le deuxième terme de l'énergie. Pour les mêmes raisons que précédemment, les termes croisés disparaissent, laissant les termes carrés :

$$\frac{1}{2G} \left(\frac{T_x^2}{S^2} \int_s ds + \frac{T_y^2}{S^2} \int_s ds + \frac{Mt_z^2}{I_G^2} \int_s x^2 ds + \frac{Mt_z^2}{I_G^2} \int_s y^2 ds \right) = \frac{1}{2G} \left(\frac{T_x^2}{S} + \frac{T_y^2}{S} + \frac{Mt_z^2}{I_G} \right)$$

Finalement après intégration, on obtient une expression de l'énergie par unité de longueur, en fonction des composantes du torseur¹ :

$$W^l = \frac{T_x^2}{2GS} + \frac{T_y^2}{2GS} + \frac{N_z^2}{2ES} + \frac{Mf_x^2}{2EI_x} + \frac{Mf_y^2}{2EI_y} + \frac{Mt_z^2}{2GI_G}$$

A partir de cette relation, il est facile de calculer l'énergie élastique stockée dans une poutre à partir du diagramme fondamental et par intégration le long de la poutre. On pourra noter cette dernière relation de manière mnémotechnique selon :

$$W^l = \sum_{\text{composantes}} \frac{M^2}{2R}$$

où M représente une composante du torseur des forces de gauche et R la rigidité (par unité de longueur) associée².

Théorème de Clapeyron

Ce théorème, basé sur la conservation de l'énergie simple stipule que l'énergie élastique d'une poutre est égale à la somme des travaux des forces extérieures, ce qui peut s'exprimer selon :

$$W = \sum W_{F_{ext}} \Leftrightarrow \int_0^L W^l dz = \sum \frac{1}{2} P_i D_i$$

D'un point de vue thermodynamique, le travail des forces extérieures doit être compris comme le travail réversible d'un système élastique, ie. dont la force P_i est proportionnelle au déplacement D_i . Pour une poutre comportant N charges de valeurs connues, cette équation montre que l'on a N déplacements inconnus, donc que l'on ne peut pas calculer. Par contre pour le cas particulier d'une charge unique, il est possible de l'appliquer directement pour calculer le déplacement au point d'application de la charge.

Matrices de Souplesse

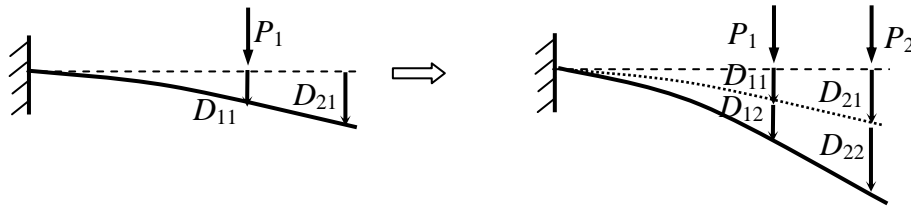
Nous allons montrer que grâce à la linéarité des équations de mécanique en élasticité, nous allons pouvoir décrire une poutre de façon matricielle, très pratique pour effectuer de

¹ Il est intéressant de noter que cette énergie par unité de longueur est obtenue par une sommation des différentes composantes. Cela signifie que les théorèmes énergétiques pourront être traités indépendamment des différentes directions.

² R représente le facteur de proportionnalité entre un effort (au sens général) et sa variable conjuguée, donc par analogie avec la traction pure, c'est la rigidité du système.

nombreux calculs. Nous allons développer cette description à partir de deux principes évidents : **principes de superposition** et de **proportionnalité**.

Le premier nous permet d'énoncer que pour une poutre comportant N charges, le déplacement du $i^{\text{ème}}$ point est égal à la somme des déplacements de ce même point sous les N charges, appliquées individuellement.



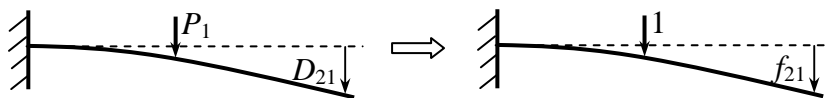
Écrivons cet énoncé pour une poutre comportant deux charges¹ P_1 et P_2 , aux points 1 et 2. Sous l'application de la première charge, par exemple P_1 , le point 1 se déplace de D_{11} et le point 2 de D_{21} (cf. figure). Lorsqu'on ajoute la deuxième charge, le point 1 se déplace de D_{12} supplémentaire et le point 2 de D_{22} . Le déplacement total D_1 et D_2 des points 1 et 2 respectivement sont donc :

$$\begin{cases} D_1 = D_{11} + D_{12} \\ D_2 = D_{21} + D_{22} \end{cases}$$

Le deuxième principe de proportionnalité nous permet d'énoncer que le déplacement d'un point quelconque i dû à une charge j est proportionnel à cette charge. Ce qui s'écrit :

$$D_{ij} = f_{ij} \cdot P_j$$

Le facteur de proportionnalité est appelé **coefficient d'influence**. Il représente le rapport entre déplacement du point sous la force j et cette force, ce qui est équivalent à dire qu'il représente le déplacement par unité de force, ou bien encore le déplacement sous une charge unitaire (cf figure).



Toujours dans le cas de la poutre comportant deux charges, écrivons les déplacements en fonction des coefficients d'influence :

$$\begin{cases} D_1 = f_{11} \cdot P_1 + f_{12} \cdot P_2 \\ D_2 = f_{21} \cdot P_1 + f_{22} \cdot P_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Nous arrivons donc à une écriture matricielle de la poutre. L'intérêt évident est de pouvoir calculer les déplacements aux points 1 et 2 pour n'importe quelle valeur des deux charges, puisque lorsqu'on a calculé la matrice, il suffit de remplacer P_1 et P_2 .

Nous allons montrer (toujours sur un exemple comportant deux charges) que la **matrice de souplesse d'une poutre est symétrique**.

Pour cela, considérons la poutre précédente, et appliquons le théorème de Clapeyron, en décomposant le chargement : premièrement la charge P_1 , puis la charge P_2 . Nous effectuerons ensuite le calcul en plaçant les charges dans l'ordre inverse.

¹ Considérer seulement deux charges n'enlève rien à la rigueur de l'explication, puisque cela reviendrait au même de considérer une poutre comportant déjà $i-1$ charges, que l'on prend comme référence et à laquelle on ajoute deux charge i et j . Par contre l'illustration avec seulement deux charges simplifie l'écriture, et nous l'espérons la compréhension.

L'application de P_1 , conduit à une énergie élastique :

$$W_{(1)} = \frac{1}{2} P_1 D_{11} = \frac{1}{2} f_{11} \cdot P_1^2$$

L'application de P_2 conduit à ajouter le travail de P_1 (qui est à sa valeur nominale¹) et le travail de P_2 :

$$W_{(2)} = P_1 \cdot D_{12} + \frac{1}{2} P_2 \cdot D_{22} = P_1 \cdot f_{12} \cdot P_2 + \frac{1}{2} f_{22} \cdot P_2^2$$

L'énergie totale est bien sûr la somme des deux :

$$W = W_{(1)} + W_{(2)} = \frac{1}{2} f_{11} P_1^2 + \frac{1}{2} f_{22} P_2^2 + f_{12} P_2 P_1$$

Effectuons maintenant le même calcul, mais en appliquant les charges P_1 et P_2 dans l'ordre inverse. On obtient cette fois une énergie totale :

$$W = \frac{1}{2} f_{11} P_1^2 + \frac{1}{2} f_{22} P_2^2 + f_{21} P_1 P_2$$

Bien évidemment, puisque nous considérons des systèmes réversibles (et sans échange de chaleur), l'énergie élastique ne dépend pas du chemin suivi, et donc les deux expressions de l'énergie sont égales, ce qui conduit à :

$$f_{12} = f_{21}$$

montrant ainsi que la matrice de souplesse est symétrique.

Enfinement en généralisant à une poutre comportant N charges, appliquées en N points, on peut toujours calculer une matrice de souplesse qui relie deux vecteurs colonnes selon :

$$\bar{D} = \bar{f} \cdot \bar{P}$$

De manière symétrique, on peut définir la **matrice raideur**, inverse de la matrice souplesse :

$$\bar{P} = \bar{k} \cdot \bar{D} \quad \text{et} \quad \bar{k} = \bar{f}^{-1}$$

On notera par ailleurs que l'énergie élastique peut se calculer directement avec la matrice de raideur selon :

$$W = \frac{1}{2} \bar{P}^t \cdot \bar{f} \cdot \bar{P}$$

Théorèmes de Castigliano

Ces deux théorèmes permettent de calculer les déplacements et les coefficients d'influence. On considère une poutre soumise à N charges.

Th1 : *La dérivée de l'énergie élastique par rapport à une charge P_i donne le déplacement du point d'application de la charge.*

Th2 : *La dérivée seconde de l'énergie élastique par rapport à deux charges P_i et P_j est égale au coefficient d'influence équivalent f_{ij} .*

Nous allons illustrer ces deux théorèmes à l'aide de la poutre comportant deux charges. L'énergie élastique est donnée par :

$$W = \frac{1}{2} f_{11} P_1^2 + \frac{1}{2} f_{22} P_2^2 + f_{12} P_1 P_2$$

En dérivant, par exemple, par rapport à la charge P_1 , on obtient bien le déplacement D_1 du point d'application de P_1 et :

$$\frac{\partial W}{\partial P_1} = f_{11} P_1 + f_{12} P_2 = D_1$$

¹ On notera la différence entre le travail d'une force qui se déplace alors qu'elle est à sa valeur nominale et une force que l'on applique depuis 0 jusqu'à sa valeur nominale de façon réversible.

En dérivant une deuxième fois par exemple par rapport à P_2 , on obtient :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial P_2 \partial P_1} = f_{12}$$

c'est-à-dire le coefficient d'influence.

Ce théorème de Castigliano permet notamment de calculer tout déplacement (au sens général) de tout point d'application d'une charge d'une poutre comportant plusieurs charges.

Théorème de Maxwell-Mohr

Nous allons voir que ce théorème permet de calculer le déplacement en tout point d'une poutre, même s'il n'y a pas de charge appliquée en ce point.

Reprenons le calcul de l'énergie élastique d'une poutre selon la notation générale que nous avons introduite¹.

$$W = \int_L \frac{M^2}{2R} dz$$

M est bien évidemment une fonction des n charges appliquées à la poutre. Appliquons le théorème de Castigliano en un point i de la poutre (donc pour un point auquel est appliqué une charge P_i)

$$D_i = \frac{\partial W}{\partial P_i} = \frac{1}{2R} \int_L 2M \cdot \frac{\partial M}{\partial P_i} dz$$

Or d'après le théorème de superposition, on peut écrire :

$$M(P_1, P_2, \dots, P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, \dots, P_n) = M(P_1, P_2, \dots, P_{i-1}, 0, P_{i+1}, \dots, P_n) + M(P_i)$$

donc la dérivée de M par rapport à P_i s'exprime selon :

$$\frac{\partial M}{\partial P_i} = \frac{\partial M(P_i)}{\partial P_i}$$

Comme les composantes M du torseur des forces de gauche sont des fonctions linéaires des charges, on peut écrire :

$$M(P_i) = P_i \cdot M(P_i = 1)$$

où $M(P_i = 1)$ représente la composante M avec une charge P_i unitaire. En calculant la dérivée, on obtient :

$$\frac{\partial M}{\partial P_i} = M(P_i = 1)$$

En reportant cette valeur de dérivée dans l'intégrale ci-dessus, on obtient l'expression du théorème de Maxwell Mohr :

$$D_i = \int_L \frac{M \cdot M(P_i = 1)}{R} dz$$

Concrètement pour calculer le déplacement du point i d'une poutre donnée, on calcule d'une part la résultante de cette poutre avec son chargement complet, et d'autre part la résultante de cette même poutre avec une seule charge en i , de valeur unitaire (cf. exemple plus loin).

Ce théorème peut être facilement étendu en un point d'une poutre auquel aucune charge n'est appliquée. Pour cela, décomposons de nouveau le torseur en deux parties en appliquant toujours le théorème de superposition :

¹ Nous avons omis le signe sommation aux six composantes du torseur correspondant au cas général, par soucis de clarté, mais cela n'enlève rien à la rigueur du résultat.

$$M(P_1, \dots, P_n) = M(P_1, P_2, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n) + M(P_i)$$

Reportant cette valeur dans l'expression du théorème, on obtient :

$$D_i = \int_L \frac{M(P_1, P_2, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n) \cdot M(P_i = 1)}{R} dz + P_i \int_L \frac{M(P_i = 1)^2}{R} dz$$

Si l'on fait tendre la charge P_i vers 0, c'est-à-dire que l'on considère la poutre sans charge en P_i , alors le deuxième terme disparaît, et on retrouve le même théorème de Maxwell-Mohr, mais pour un point où aucune charge n'est appliquée.

Applications pratiques.

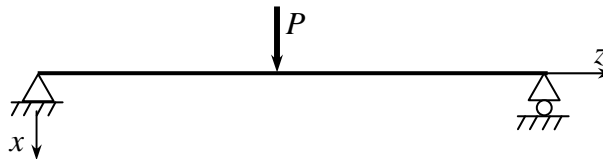
Ces divers théorèmes énergétiques permettent de calculer les déplacements en divers points de poutres. On constate qu'ils requièrent dans tous les cas un calcul intégral d'un produit de résultantes du torseur des forces de gauche, c'est-à-dire de la forme :

$$\int M_1 \cdot M_2 dz$$

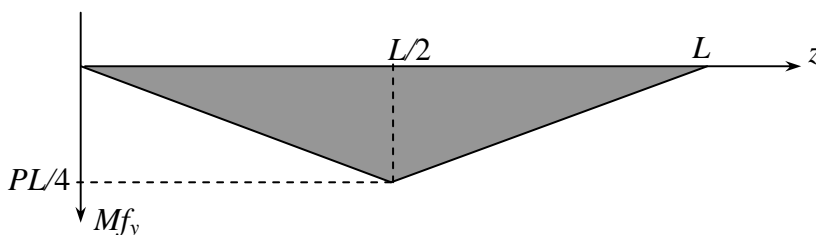
Comme ces fonctions sont majoritairement simples et souvent semblables (constantes ou multi-linéaires), elles ont été tabulées et regroupées sous le nom d'**intégrales de Mohr**, en permettant de transformer l'intégrale en sommes et produits. On trouvera ces intégrales dans l'annexe II

Exemples de calcul de déplacement

Reprenons l'exemple de la poutre soumise à une flexion 3 points



Nous avons déjà calculé le moment fléchissant en fonctions de z . Si on le représente sur une figure on obtient :

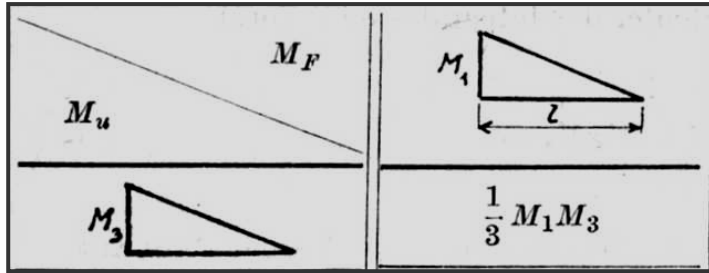


Calculons le déplacement au centre de la poutre. Comme on est en présence d'une seule charge, on peut appliquer le **théorème de Clapeyron** au centre de cette poutre.

L'énergie élastique est égale à :

$$W = \frac{1}{2EI_y} \int_0^L Mf_y^2 dz$$

L'utilisation des intégrales de Mohr simplifie le calcul. Pour cela, en remarquant la symétrie, on peut utiliser le cas suivant (cf. annexe):



avec : $M1 = M3 = PL/4$

Donc l'intégrale devient :

$$I = \int_0^L Mf_y^2 dz = 2 \left[\frac{1}{3} M_1 M_3 \frac{L}{2} \right]$$

En remplaçant le travail devient $W = \frac{1}{2EI_y} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{PL}{4} \right)^2 \cdot \frac{L}{2} = \frac{P^2 L^3}{96EI_y}$

En écrivant que l'énergie élastique est égale au travail de la charge P , on obtient :

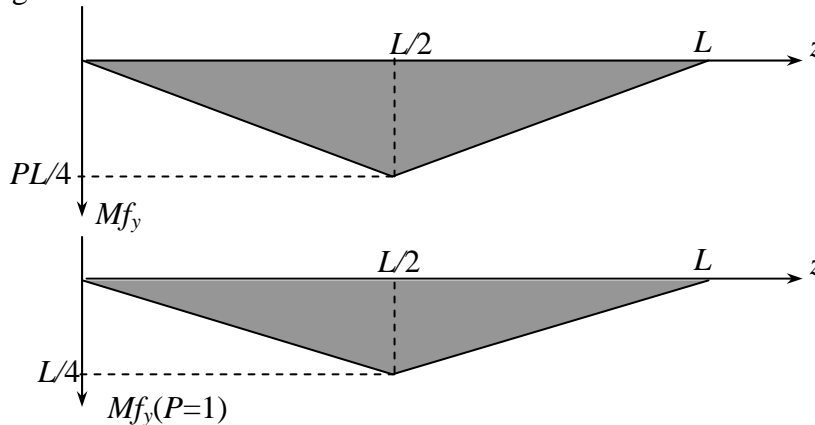
$$W = \frac{1}{2} PD \Leftrightarrow \frac{P^2 L^3}{96EI_y} = \frac{1}{2} PD \Leftrightarrow D = \frac{PL^3}{48EI_y}$$

On peut également utiliser le **théorème de Castigliano** pour calculer le déplacement au centre:

$$D = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{P^2 L^3}{96EI_y} \right) = \frac{PL^3}{48EI_y}$$

On obtient bien sûr le même résultat, et dans ce cas particulier d'une seule charge appliquée à la poutre, les deux méthodes sont équivalentes.

Appliquons maintenant le théorème de **Maxwell-Mohr** à ce même cas. Pour cela, il faut définir le moment fléchissant de la même poutre comportant une charge unique de valeur unitaire au point qui nous intéresse, $Mf(P = 1)$. En fait comme nous nous trouvons dans un cas particulier, il suffit de prendre le moment fléchissant avec la charge P et de fixer sa valeur à 1. Le diagramme est donc le suivant :



Le calcul du déplacement est donc égal à :

$$D = \int_L \frac{Mf_y \cdot Mf_y(P=1)}{EI_y} dz$$

On peut de nouveau utiliser les intégrales de Mohr, la même formule que la précédente avec :

$$M1 = PL/4 \text{ et } M3 = L/4$$

Donc l'intégrale devient :

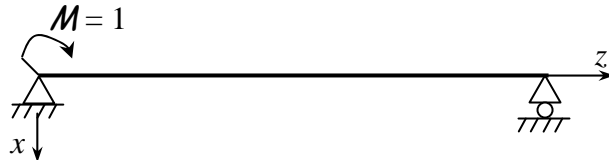
$$I = \int_0^L Mf_y \cdot Mf_y(P=1) dz = 2 \cdot \frac{1}{3} M_1 M_3 \frac{L}{2}$$

En remplaçant, on obtient donc le déplacement :

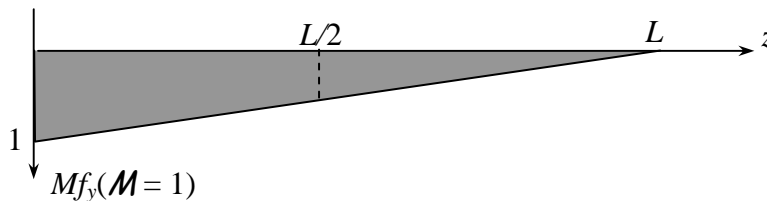
$$D = \frac{1}{EI_y} \frac{1}{3} \left(\frac{PL}{4} \right) \cdot \left(\frac{L}{4} \right) \cdot L = \frac{PL^3}{48EI_y}$$

Enfin, comme dernier exemple, calculons la rotation en G. Cette fois nous devons utiliser le théorème de **Maxwell-Mohr** car il n'y a pas de moment appliqué en ce point.

Il faut déterminer le moment fléchissant de la même poutre sur laquelle la seule charge appliquée est celle d'un moment unitaire en $z = 0$.



Après calcul, on trouve que le moment fléchissant associé à cet état est le suivant :



Appliquons le théorème de Maxwell-Mohr en utilisant les intégrales tabulées de Mohr. Pour cela, on décompose la poutre en deux parties, ce qui va nécessiter les deux formules suivantes:

	$\frac{1}{3} M_1 M_3$	$\frac{M_3}{6} (2 M_1 + M_2)$

avec pour la première : $M_1 = PL/4$; $M_3 = 1/2$; $l = L/2$

et la deuxième : $M_3 = PL/4$; $M_1 = 1/2$; $M_2 = 1$; $l = L/2$

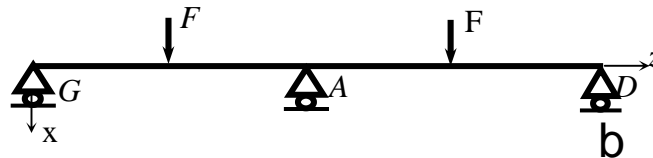
$$\theta_G = \int_L \frac{Mf_y \cdot Mf_y(M=1)}{EI_y} dz = \frac{1}{EI_y} \cdot \left(\frac{1}{3} M_1 M_3 + \frac{M_3}{6} (2M_1 + M_2) \right) \frac{L}{2}$$

$$\theta_G = \frac{1}{EI_y} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{Pl}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{Pl}{4} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \right) \cdot \frac{l}{2} \right) = \frac{3PL^2}{48EI_y}$$

3.5 Systèmes hyperstatiques

Définition

Les systèmes hyperstatiques sont ceux pour lesquels l'application directe des équations de l'équilibre statique ne permet pas de déterminer les inconnues. L'écart entre le nombre d'inconnues et le nombre d'équations représente le degré d'hyperstaticité. A titre d'exemple considérons la poutre plane suivante sur trois appuis :



On dénombre 3 inconnues : les trois composantes des forces de réaction, R_G^x , R_D^x et R_A^x , et on dispose de 2 équations : projection des forces selon x et projection des moments par rapport à un point selon y. En conséquence, le **degré d'hyperstaticité** est égal à 1 et on ne peut pas déterminer les 3 inconnues en résolvant simplement le système.

Principe de résolution

Considérons une poutre hyperstatique quelconque que l'on appellera état E . Le principe de résolution consiste tout d'abord à décomposer le système en une somme de systèmes isostatiques, en appliquant le principe de superposition. Pour cela, on supprime des liaisons surabondantes, pour se ramener ainsi un état E_o isostatique (cf tableau schématique).

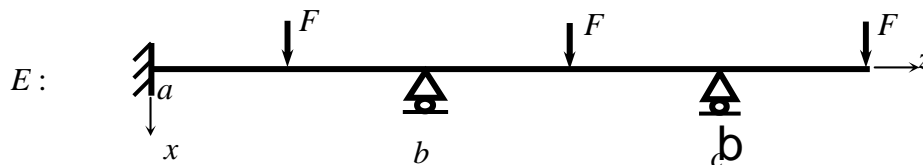
E	
$E_o + E_i$	
$E_o + \bar{E}_i \cdot R_i$	

Chaque liaison surabondante est considérée comme un état E_i constitué de la même poutre sur laquelle on place simplement la réaction inconnue R_i . En utilisant le principe de proportionnalité, cet état peut être décomposé par un état \bar{E}_i où l'on a remplacé la réaction inconnue par une force unitaire, multipliée par la réaction inconnue R_i . Ce qui finalement s'écrit¹ :

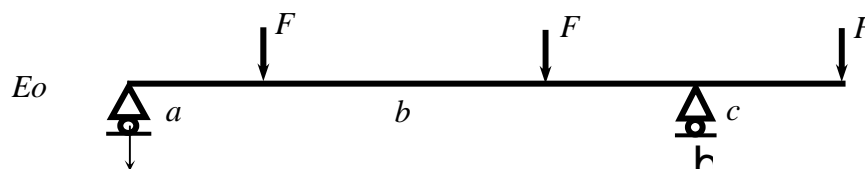
$$E = E_0 + \sum E_i = E_0 + \sum \bar{E}_i \cdot R_i$$

On écrit ensuite les équations aux limites de chaque liaison surabondante supprimée (rotation ou déplacement nul, voire à valeur imposée). On obtient ainsi un système d'équations que l'on peut résoudre pour déterminer toutes les réactions inconnues R_i . Le calcul du torseur résultant peut ensuite être réalisé toujours avec l'équation ci-dessus en reportant les valeurs des réactions inconnues.

Nous allons détailler cette méthode sur un exemple concret pour plus de clareté. Considérons la poutre suivante que nous appellerons l'état E :



On relève 4 réactions inconnues : R_a^x , M_a^y , R_b^x et R_c^x , et deux équations statiques peuvent être écrites : projection des forces selon x et projection des moments par rapport à un point quelconque selon y . Le degré d'hyperstaticité est donc de 2. Nous allons donc enlever deux inconnues², par exemple M_a^y et R_b^x pour se ramener à un système isostatique. On obtient alors la poutre suivante que l'on appellera état E_0 . Cette poutre possède deux réactions inconnues : R_{0a}^x et R_{0c}^x ³.

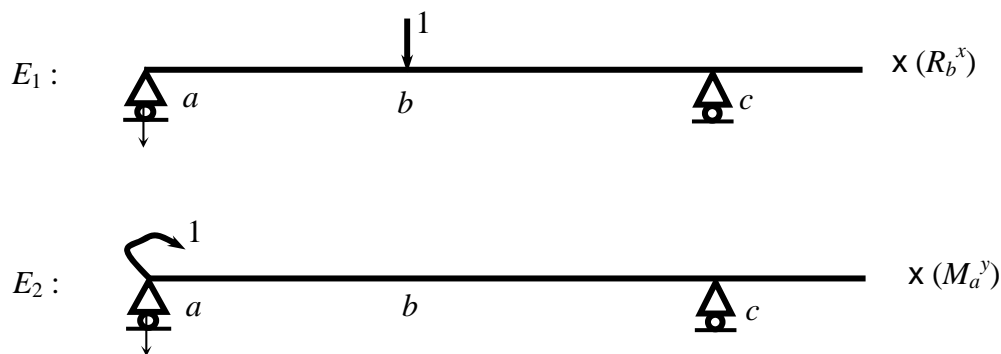


Définissons maintenant nos deux états élémentaires E_1 et E_2 supportant les charges inconnues. Pour cela, nous faisons appel au théorème de proportionnalité qui stipule qu'une poutre soumise à une charge P est équivalente au produit de la même poutre soumise à une charge unitaire par la valeur de la charge. Ces deux états sont donc :

¹ La notation « barre » sur E_i , ne représente pas une matrice, mais un état normalisé, c'est-à-dire avec des forces unitaires.

² Evidemment le choix de l'inconnue n'affecte pas la résolution. Parfois les calculs pourront être simplifiés légèrement en supprimant tel ou tel type de liaison. En fait, la principale difficulté sera parfois de représenter la liaison modifiée. Ainsi dans cet exemple si l'on supprime la réaction R_c^x , pour la liaison résiduelle seule la rotation est empêchée n'est pas « dessinable ».

³ On notera que les réactions restantes sont différentes des réactions de départ car le chargement n'est pas le même. On verra plus loin comment calculer les réactions de la poutre hyperstatique initiale.



L'équation du système global s'écrit donc :

$$E = Eo + \bar{E}_1 \cdot R_b^x + \bar{E}_2 \cdot M_a^y$$

Cette équation peut s'énoncer comme le système E est égal au système Eo + le système E_1 comportant une charge unitaire multipliée par la réaction inconnue + le système E_2 comportant une charge unitaire multipliée par la deuxième réaction inconnue.

Pour simplifier l'écriture, nous allons affecter des numéros aux points des deux liaisons que nous avons supprimées. Par exemple : $b \equiv 1$ et $a \equiv 2$. Les réactions s'écrivent donc : $M_a^y \equiv M_2^y$ et $R_b^x \equiv R_1^x$. Avec cette écriture l'équation précédente s'écrit :

$$E = Eo + \bar{E}_1 \cdot R_1^x + \bar{E}_2 \cdot M_2^y$$

Grace à cette équation, les réactions inconnues surabondantes sont vues comme des forces qu'il faut appliquer à la poutre pour ramener le déplacement ou la rotation à 0. Cette équation est générique, et elle peut bien sûr s'appliquer aux déplacements ou aux charges (moment fléchissant ou effort tranchant).

Pour trouver les deux inconnues nous allons écrire cette équation en termes de déplacements aux points des deux inconnues :

$$\begin{cases} D_b = D_1 = 0 = D_{1o} + f_{11} \cdot R_1^x + f_{12} \cdot M_2^y \\ \theta_G = \theta_2 = 0 = \theta_{2o} + f_{21} \cdot R_1^x + f_{22} \cdot M_2^y \end{cases}$$

On obtient donc un système de deux équations à deux inconnues que l'on peut mettre sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1o} \\ \theta_{2o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1^x \\ M_2^y \end{bmatrix}$$

Les différents coefficients d'influence de la matrice $f_{11}, f_{12} = f_{21}$ et f_{22} peuvent être facilement calculés, en utilisant le théorème de Maxwell-Mohr. De même la rotation du point 2 (θ_{2o}) et le déplacement du point 1 (D_{1o}) sous le chargement de l'état Eo peuvent être facilement calculés. Au total, nous avons 5 constantes à calculer pour résoudre le système. De même pour un système hyperstatique de degré 1 on aura 2 constantes à calculer et pour un système de degré 3, on aura $3 + 6 = 9$ constantes. On constate donc que la résolution est simple, mais peut facilement devenir fastidieuse.

Lorsque les réactions inconnues ont été calculées, on peut évaluer le torseur des forces de gauche en appliquant l'équation du système. Par exemple dans le cas du moment fléchissant l'équation s'écrit :

$$Mf = Mfo + \bar{M}f_1 \cdot R_1^x + \bar{M}f_2 \cdot M_2^y$$

ANNEXE I : Notations et symboles

Nous avons essayé d'utiliser des notations rigoureuses pour les différents objets mathématiques dont avons besoin.

Vecteurs : l'objet mathématique est représenté par \vec{u} , ses coordonnées dans une base donnée $\vec{u}(0,2,4)$. Pour effectuer des calculs tensoriels, ces mêmes coordonnées pourront être représentées par une matrice colonne :

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Tenseur : représenté par : $\vec{\sigma}$. Sa représentation matricielle dans un repère donné est :

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}$$

Opérateurs : Le produit d'un tenseur par un vecteur donne un vecteur. Les notations équivalentes sont donc les suivantes ¹ :

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{p} = \vec{p}$$

Si l'on effectue le produit scalaire de ce vecteur résultant par un autre vecteur, on obtient alors un scalaire. Les deux notations sont donc équivalentes :

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{q} = \vec{q}^t \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = a$$

Principaux symboles utilisés :

\vec{C}_G : Moment résultant du torseur des forces de gauche par rapport au point G

\vec{D} : déplacement en un point

E : module élastique longitudinal, de Young

k_{ij} : coefficient de raideur

f_{ij} : coefficient d'influence

I_y : moment d'inertie d'une section par rapport à l'axe y

M_f : moment fléchissant

M_t : moment de torsion

\vec{n} : vecteur normal d'une facette

N : effort normal

q : charge répartie

(r, θ, z) : repère cylindrique

\vec{R} : résultante du torseur des forces de gauche

\vec{t} : vecteur tangentiel d'une facette de normale n

T : effort tranchant

\vec{u} : vecteur déplacement

(x_I, x_{II}, x_{III}) ou (x, y, z) : repère lié à l'objet

(x_I, x_{II}, x_{III}) : repère principal

W : énergie élastique

$\vec{\varepsilon}$: tenseur des déformations

$\vec{\phi}_n$: vecteur contrainte sur la facette de normale n

$\vec{\phi}_n^\varepsilon$: vecteur déformation sur la facette de normale n

$\phi(x,y)$: fonction de gauchissement et fonction d'Airy

λ : constante de Lamé

μ : module de cisaillement ou de Coulomb

ν : coefficient de Poisson

$\vec{\sigma}$: tenseur des contraintes

σ_{nn} et τ_{nt} : contraintes normales et tangentielles

$\vec{\omega}$: tenseur rotation

¹ Les objets tenseurs ou vecteurs ne sont pas identiques à des matrices et on ne devrait pas écrire $\vec{u} = \vec{u}$, mais en gardant à l'esprit qu'il s'agit d'un abus, nous utiliserons cette notation pour simplifier l'écriture.

ANNEXE II : Intégrales de Mohr

Il s'agit d'intégrales tabulées de produits de fonctions du type : $I = \frac{1}{L} \int_0^L M_1 \cdot M_2 \cdot dz$

où M_1 et M_2 représentent des composantes quelconques du torseur de gauche.

Elles peuvent être utilisées directement pour calculer, par exemple des déplacements selon :

$$D = \frac{1}{EI} \int_0^L M_1 M_2 dz$$

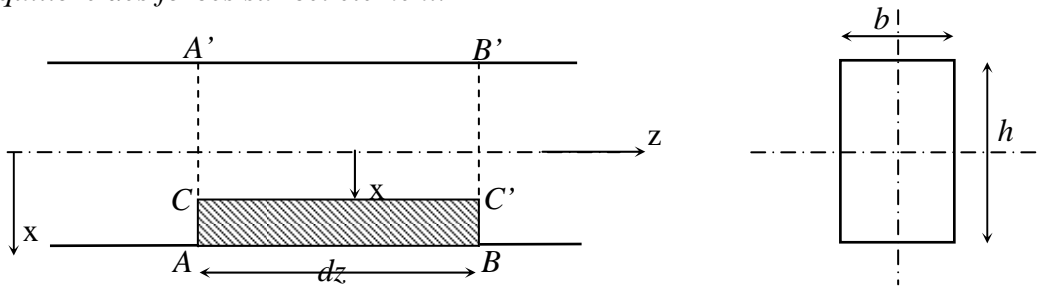
Dans ce cas il suffit de prendre le résultat approprié dans le tableau et de multiplier par la longueur de l'élément de poutre.

$\frac{1}{L} \int_0^L M_F M_u dx$					
	$\frac{M_2}{6} (2M_1 + M_2)$	$\frac{1}{3} M_1 M_3$	$\frac{1}{6} M_1 M_4$	$\frac{1}{6} M_1 M_3$	$\frac{1}{3} M_1 M_3$
	$\frac{M_4}{6} (M_1 + 2M_2)$	$\frac{1}{6} M_1 M_4$	$\frac{1}{6} M_1 M_4$	$\frac{1}{6} M_1 M_4$	$\frac{1}{3} M_1 M_4$
	$\frac{1}{3} (M_1 M_3 + M_2 M_4) + \frac{1}{6} (M_1 M_4 + M_2 M_3)$	$\frac{M_1}{6} (2M_3 + M_4)$	$\frac{1}{6} M_1 M_4$	$\frac{1}{6} M_1 M_3$	$\frac{1}{3} M_1 (M_3 + M_4)$
	$\frac{1}{2} M_3 (M_1 + M_2)$	$\frac{1}{2} M_1 M_3$	$\frac{1}{6} M_1 M_4$	$\frac{1}{2} M_1 M_3$	$\frac{2}{3} M_1 M_3$
	$\frac{2-b}{6} M_1 M_3 + \frac{1+b}{6} M_2 M_3$	$\left[\frac{1}{3} - \frac{(b-a)^2}{6K} \right] M_1 M_3$ si $a < b$ $K = b(1-a)$ si $a > b$ $K = a(1-b)$	$\frac{2-b}{6} M_1 M_3$	$\frac{1+b-b^2}{3} M_1 M_3$	$\frac{1+b-b^2}{3} M_1 M_3$
	$\frac{b}{6} [(3-b)M_1 + bM_2] M_3$	$\frac{b(3-b)}{6} M_1 M_3$	$\frac{b(3-b)}{6} M_1 M_3$	$\frac{2b-a + (b-a)^2(1-b)}{6} M_1 M_3$ pour K, voir ci-dessus	$\frac{b^2(2-b)}{3} M_1 M_3$
	$\frac{1-3(1-b^2)}{6} M_1 M_3 - \frac{1-3b^3}{6} M_2 M_3$	$\frac{1-3(1-b)^2}{6} M_1 M_3$	$\frac{1-3b^3}{6} M_2 M_3$	si $a < b$ $\left[1 + a - 3 \frac{(1-b)^2}{1-a} \right] \frac{M_1 M_3}{6}$ si $a > b$ $-\left[2 - a - 3 \frac{b^2}{a} \right] \frac{M_1 M_3}{6}$	$\frac{6b^2 - 4b^3 - 1}{3} M_1 M_3$
	$\frac{1}{3} M_3 (M_1 + M_2)$	$\frac{1}{3} M_1 M_3$	$\frac{1}{6} M_1 M_4$	$\frac{1+a-a^2}{3} M_1 M_3$	$\frac{8}{15} M_1 M_3$
	$\frac{1}{12} M_3 (3M_1 + M_2) + \frac{1}{12} M_4 (M_1 + 3M_2)$	$\frac{1}{4} M_1 M_3$	$\frac{1}{12} M_1 M_4$	$\frac{3-3a+a^2}{12} M_1 M_3 + \frac{1+a+a^2}{12} M_1 M_4$	$\frac{1}{5} M_1 M_4$

ANNEXE III : Contrainte de cisaillement dans une poutre à section rectangulaire

Nous allons effectuer un calcul plus exact de la contrainte de cisaillement sous l'effet de l'effort tranchant, dans le cas d'une poutre à section rectangulaire. Considérons un segment de poutre AA'B'B de longueur dz soumise à un moment fléchissant $M_{fy} = M$, à la cote z et $M + dM$ à la cote z + dz. On considère un élément de volume ACC'B dont la surface supérieure est à la cote x.

Rappelons que sur une surface libre, la contrainte de cisaillement est nulle, et écrivons l'équilibre des forces sur cet élément.



Sur AC, on a : $F_1 = \int_S \sigma_{zz}(z) ds = \int_S \frac{M}{I} \cdot x ds$

avec $S = CA \cdot b$

Sur BC', on a : $F_2 = \int_S \sigma_{zz}(z + dz) ds = \int_S \frac{M + dM}{I} \cdot x ds$

avec $S = CA \cdot b = C'B \cdot b$

Sur CC', on a : $F_3 = \sigma_{xz} \cdot b \cdot dz$

Sur AB, la force est nulle.

Écrivons l'équilibre des forces : $F_1 + F_2 = F_3$

$$\sigma_{xz} = \frac{dM}{dz} \cdot \frac{1}{I_y b} \cdot \int_S x ds \quad \text{avec } \frac{dM}{dz} = T_x \text{ effort tranchant}$$

et $\int_S x ds = Q(x)$ est le moment statique de la surface.

Finalement, on obtient : $\sigma_{xz} = \frac{T_x Q}{I_y b}$

Calculons l'intégrale : $\int_S x ds = b \int_x^{h/2} x dx = \frac{b}{2} \left(x^2 - \frac{h^2}{4} \right)$

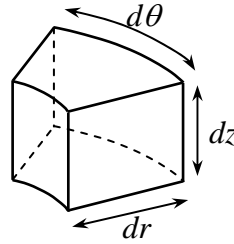
La contrainte de cisaillement varie selon une parabole dont la valeur maximale est au niveau de la fibre neutre, et les valeurs sont nulles sur les deux faces supérieures et inférieures.

ANNEXE IV : Equations d'équilibre indéfini en coordonnées cylindriques et sphériques

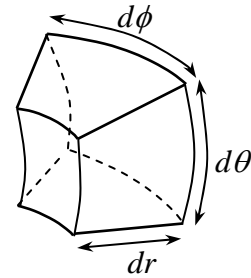
Dans d'autres repères, ces équations se calculent comme dans un repère cartésien (x,y,z) en effectuant la projection des forces dans chaque direction. Le calcul est cependant plus complexe, puisque les surfaces du volume élémentaires ne sont plus égales et parallèles.

coordonnées cylindriques : repère (r,θ,z)

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0 \end{cases}$$



coordonnées sphériques : repère (r,θ,ϕ)



$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi} + \sigma_{r\theta} \cot \theta) = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \sigma_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\theta} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi}) \cot \theta) = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\phi} + 2\sigma_{\theta\phi} \cot \theta) = 0 \end{cases}$$