

# TUTORAT ELECTRONIQUE EN ANALYSE MATHEMATIQUE - TEAM

2010
Année scolaire 2010 - 2011

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

**Cours / Exercices**

FORMATION

**Auteurs de la Ressource Pédagogique**
**Charnay Michel**
**Dubois Gérard**
**Jai Mohammed**

membre de UNIVERSITÉ DE LYON

INSA LYON

**Tutorat Electronique en Analyse Mathématique (TEAM)**

## Avant-propos

Ce tutorat électronique est constitué de cours de référence en analyse mathématique associés à des tests de connaissance. Même s'il peut se révéler utile à un groupe plus large, ce tutorat est destiné à un public insalien bien déterminé : celui des admis directs 3$^{\text{ème}}$ année, des DUT+3 et autres étudiants étrangers d'échange.
Il a été conçu pour combler des lacunes éventuelles en analyse, niveau 1$^{\text{er}}$ cycle école d'ingénieurs, ou pour se mettre à ce niveau, à partir de connaissances élémentaires en arithmétique car les mathématiques qui y sont proposées sont **complètes** et **autosuffisantes**. Les tests de connaissance permettent d'assimiler les notions développées dans les cours de référence. Ils sont constitués, à partir d'un chapeau introductif, d'un questionnement sur le thème choisi avec réponses et explications le tout formant autant de problèmes, ou exercices, avec solutions commentées. Ces tests viennent aussi compléter les cours de référence qui comportent eux-mêmes maints exemples d'illustration.

Ce tutorat a pour ambition de contribuer à la formation, et l'intégration en 3$^{\text{ème}}$ année, d'élèves ingénieurs en provenance de filières particulières conformément à une des missions historiques de l'INSA voulues par le Recteur Capelle. Il a été créé par une équipe expérimentée connaissant bien les enseignements d'un 2$^{\text{ème}}$ cycle école d'ingénieurs.

Ce projet de cours électronique a démarré avec l'aide de plusieurs ressources (type Bonus Qualité Formation), celle du Centre et du Laboratoire de Mathématiques. Il a ensuite été supporté pendant deux années par le Département Génie Electrique puis par la Direction de la Formation. Dorénavant le Centre de Mathématiques, devenu Pôle de Mathématiques, prend en charge le suivi et la gestion de ce tutorat avec l'appui de la Direction des Systèmes d' Information.

Les auteurs (INSA-LYON, novembre 2008).

'Young men should prove theorems, old men should write books.'
G.H. Hardy (mathématicien britannique 1877-1947)

**BIBLIOGRAPHIE**

Le cours de référence écrit dans le tutorat TEAM est le reflet des actions pédagogiques des auteurs à l'INSA-Lyon, tant en premier cycle qu'en Département d'option. Ils ont été influencés par des ouvrages dont la caractéristique est d'être auto-suffisants, bien ciblés, avec un modeste pré-requis mais, néanmoins, amenant le lecteur pas à pas au niveau souhaité. Bien souvent, de tels ouvrages sont écrits par les anglo-saxons et rompent avec l'esprit encyclopédique cher à Bourbaki. Ils s'éloignent aussi de l'esprit des classes préparatoires françaises dont le programme est imposé (à cause du concours) lequel s'inscrit dans un cursus pédagogique bien déterminé. Nous donnons ci-après des exemples de tels ouvrages. Parmi eux nous retiendrons plus particulièrement celui de Serge Lang (1927-2005) éminent pédagogue franco-américain qui a formé et influencé toute une génération de mathématiciens.

P. BAXANDALL & H. LIEBECK 'Vector Calculus', Clarendon press. Oxford, 1986

R. BORRELLI and C. COLEMAN 'Differential equations. A modeling perspective', John Wiley & Sons Inc., 2004

J.D. DEPREE & C.W. SWARTZ 'Introduction to Real Analysis', John Wiley & Sons Inc., 1988

E. KREYSZIG 'Advanced engineering mathematics', John Wiley & Sons Inc., 1999

S. LANG 'Analysis I', Addison-Wesley Publishing Company, 1976

C. MOLER 'Numerical Computing with Matlab', Society for Industrial Applied Mathematics, 2008

M. REED 'Fundamental ideas of analysis', John Wiley & Sons Inc., 1998

″Tout livre se nourrit non seulement des matériaux que lui fournit la vie, mais aussi et peut-être surtout de l'épais terreau de la littérature qui l'a précédé″

Julien Gracq in 'Préférences. Pourquoi la littérature respire mal', Corti, 1961



# COURS D'ANALYSE MATHEMATIQUE

## Chapitre 0 Préliminaires

Version 2009
Année scolaire 2010 - 2011

Cours

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

FORMATION

**Auteurs de la Ressource Pédagogique**
**Charnay Michel**
**Dubois Gérard**

membre de UNIVERSITÉ DE LYON

INSA LYON

# Table des matières

Nous introduisons dans cette partie les notions d'ensemble, de fonction, de cardinal d'un ensemble ainsi que les bases de la logique sur lesquelles on s'appuie pour faire des démonstrations. Pour illustrer le propos on ira souvent chercher des exemples d'ensembles de nombres introduits dans le Chapitre 1, §1, qui traite des propriétés du corps des réels. Cela n'est pas vraiment un handicap car tout au long de ces préliminaires nous ferons appel, très souvent, à l'intuition et au bon sens.

# 1 Ensembles et fonctions

Voici la définition d'un ensemble due à Georg CANTOR (1845-1918) : un ensemble résulte de la réunion dans une même entité de certains objets ***bien déterminés***. On appelle ces objets les éléments de l'ensemble. Si $E$ est un ensemble et $x$ un élément de $E$, on note alors $x \in E$. Si $x$ est un élément d'un ensemble $X$ comprenant les éléments de l'ensemble $E$, il se peut que $x$ n'appartienne pas à $E$ ; dans ce cas on note $x \notin E$.

Un ensemble est défini soit par la liste exhaustive de ses éléments (on dit alors qu'il est défini en extension) soit par la notation en accolade $\{x \mid P(x)\}$ ou $\{x\,; P(x)\}$ qui indique la collection d'objets $x$ pour lesquels la proposition $P(x)$ est vraie (on dit qu'il est défini en compréhension). Par exemple l'ensemble $E$ suivant, défini en extension,

$$E \equiv \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

représente tous les chiffres utilisés dans la notation arabe. Par ailleurs si $P(x)$ représente la proposition "le nombre entier $x$ est pair", alors l'ensemble des chiffres pairs est défini en compréhension comme suit

$$F \equiv \{x \in E \mid P(x)\}$$

ce qui équivaut à

$$F \equiv \{0, 2, 4, 6, 8\}.$$

Comme autres exemples d'ensembles définis en extension, il y a l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels :

$$\mathbb{N} \equiv \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

ou celui des entiers relatifs :

$$\mathbb{Z} \equiv \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

alors que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est défini en compréhension :

$$\mathbb{Q} \equiv \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}.$$

Pour deux ensembles $S$ et $T$ donnés, on définit leur réunion, $S \cup T$, et leur intersection, $S \cap T$, comme suit :

$$\begin{aligned} S \cup T &\equiv \{x \mid x \in S \text{ ou } x \in T\} \\ S \cap T &\equiv \{x \mid x \in S \text{ et } x \in T\}. \end{aligned}$$

Nous dirons que l'ensemble $S$ est un sous-ensemble de $T$ si chaque élément de $S$ est aussi dans $T$, auquel cas on écrit $S \subset T$. Si $S \subset T$ et $S \neq T$, nous dirons que $S$ est strictement contenu dans $T$. On note l'ensemble n'ayant pas d'élément par $\emptyset$ et on observe que $\emptyset$ est un sous-ensemble de tout ensemble $X$. Remarquons que, lorsque nous parlons d'ensembles et d'opérations sur les ensembles, nous supposons qu'il y a un ensemble universel qui contient tous les ensembles évoqués. Par exemple si nous parlons d'intervalles réels ou de nombres rationnels, l'ensemble universel est $\mathbb{R}$, le corps des réels.

Si $S$ est un sous-ensemble de $X$, le complément de $S$ dans $X$ noté $S^C$, est l'ensemble des éléments de $X$ qui ne sont pas dans $S$, c'est à dire :

$$S^C \equiv \{x \in X \mid x \notin S\}.$$

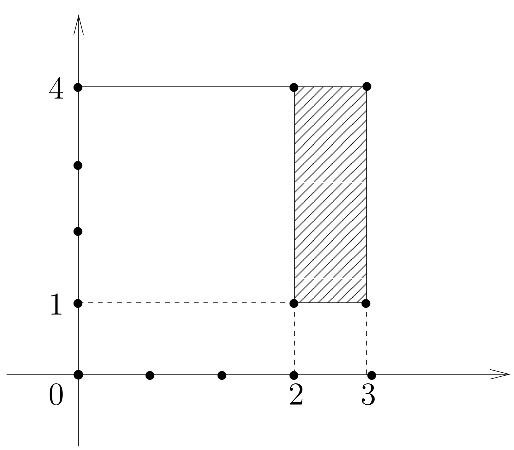
La définition de $S^C$ dépend de l'ensemble $X$ qui contient $S$. Plus généralement si $T$ et $S$ sont des sous-ensembles quelconques de $X$, le complément de $S$ dans $T$, noté $T \setminus S$, est défini par :

$$T \setminus S \equiv \{x \in X \mid x \in T \text{ et } x \notin S\}.$$

Si $S$ et $T$ sont des ensembles, on définit leur produit cartésien, noté $S \times T$, comme l'ensemble de tous les couples ordonnés où le premier élément du couple appartient à $S$ et le second à $T$ :

$$S \times T \equiv \{(s,t) \mid s \in S \text{ et } t \in T\}.$$

Ainsi deux couples $(x, y)$ et $(x', y')$ de $S \times T$ sont identiques s'il y a identité entre $x$ et $x'$ et entre $y$ et $y'$ : $x = x'$ et $y = y'$ ; ils sont différents sinon. Par exemple, si $S$ représente l'intervalle fermé $[2, 3]$ et $T$ l'intervalle fermé $[1, 4]$ alors $[2, 3] \times [1, 4]$ est l'ensemble des couples ordonnés de réels $(x, y)$ tels que $2 \leq x \leq 3$ et $1 \leq y \leq 4$. Ainsi $[2, 3] \times [1, 4]$ est le rectangle du plan réel dont les sommets sont $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$.




Si maintenant $S$ et $T$ représentent l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, le produit cartésien de $S$ et $T$ est le plan euclidien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, noté encore $\mathbb{R}^2$.

**Définition d'une fonction.** Soit $S$ et $T$ deux ensembles. Une fonction de l'ensemble $S$ vers l'ensemble $T$ est un sous-ensemble $F$ de $S \times T$ tel que chaque $s \in S$ apparaît dans, au plus, un couple ordonné de $F$. Pour chaque paire $(s, t) \in F$ on appelle $t$ la valeur de la fonction en $s$ et si le nom de la fonction est $f$ nous écrivons $t = f(s)$. On remarquera la distinction entre $F$ et $f$. L'ensemble $F$ est le sous-ensemble des couples ordonnés tandis que $f(s)$ est le nom du second élément du couple ordonné dont le premier élément est $s$. Le symbole $f$ est le nom de la règle qui assigne $f(s)$ à $s$ (c'est le nom de la fonction) alors que $F$ est appelé le ***graphe*** de $f$. On convient de représenter la fonction $f$ de la façon suivante

$$\begin{array}{ccl} S & \xrightarrow{f} & T \\ s & \rightarrow & t = f(s)\ . \end{array}$$

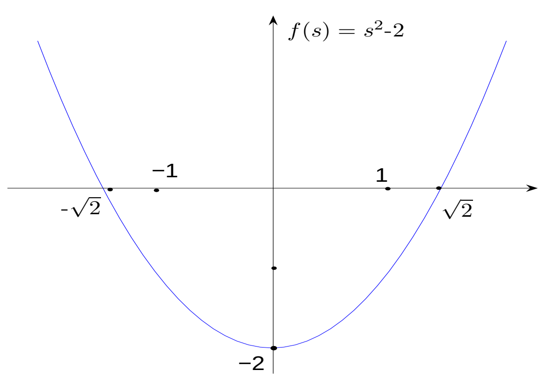
**Définitions.** L'ensemble $\{s \mid (s,t) \in F\}$ est appelé le ***domaine*** de $f$ et l'ensemble $\{t \mid (s,t) \in F\}$ est appelé l'***image*** de $f$. Ces ensembles seront désignés par les symboles $Dom(f)$ et $Im(f)$. Lorsque le domaine de $f$ est l'ensemble $S$ tout entier on parle d'***application*** $f$ au lieu de fonction.

Nous dirons que "$f$ est une fonction de $S$ dans $T$" pour indiquer que le domaine de $f$ est contenu dans $S$ et l'image de $f$ est un sous-ensemble de $T$. Nous dirons aussi que "$f$ est une fonction définie sur $S'$ à valeurs dans $T$" pour indiquer que $Dom(f) = S'$ avec $Im(f) \subset T$.

**Exemple 1.** Soit une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par la formule $f(s) = s^2 - 2$ pour chaque réel $s$. L'ensemble $F$ consiste en tous les couples ordonnés de nombres réels de la forme $(s, s^2 - 2)$, c'est à dire

$$F = \left\{(s, s^2 - 2) \mid s \in \mathbb{R}\right\}\ .$$

Cet ensemble $F$, sous-ensemble du plan $\mathbb{R}^2$, est le graphe de $f$.
La nécessité que, dans la définition d'une fonction, chaque $s$ apparaisse comme premier élément d'au plus un couple ordonné, assure que pour chaque $s \in Dom(f)$ la fonction a exactement une valeur. Ainsi la ligne verticale passant par le point $(s, 0)$ de $\mathbb{R}^2$ coupe le graphe de $f$ en exactement un point. Ici le domaine de $f$ est $\mathbb{R}$ et l'image de $f$ est le sous-ensemble $[-2, +\infty) \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x\}$.

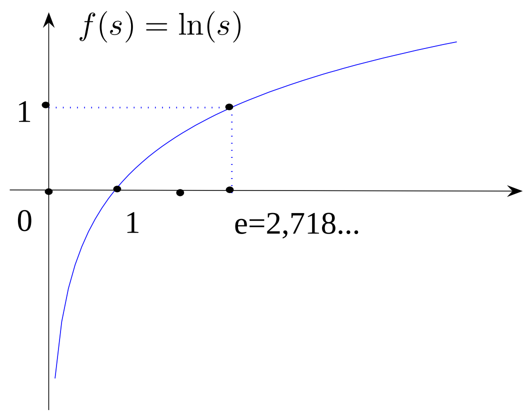



■

**Exemple 2.** Soit $f$ la fonction de l'ensemble $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par la formule $f(s) = \ln(s)$ pour $s > 0$. On suppose connue la fonction logarithme népérien utilisée dans la définition de $f(s)$. Elle sera définie plus loin dans le Chapitre 1. Dans cet exemple on a $S = T = \mathbb{R}$ et le sous-ensemble $F$ de $S \times T = \mathbb{R}^2$ tel que

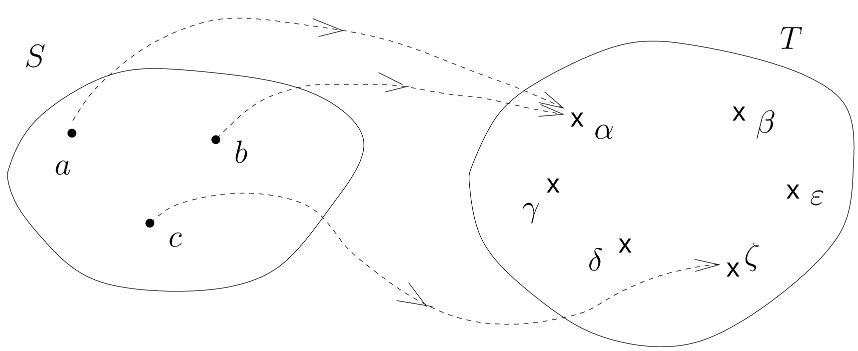
$$F = \{(s, \ln(s)) \mid s \in \mathbb{R} \text{ et } s > 0\}$$

est le graphe de la fonction logarithme naturel. Le domaine de la fonction logarithme est l'ensemble des réels strictement positifs : $Dom(f) = ]0, +\infty)$ et l'image de $f$ est $\mathbb{R}$ tout entier (cf. Chapitre 1, §8) : $Im(f) = \mathbb{R}$. Tout ceci est résumé dans le graphe de la fonction $f$ représenté ci-après.




■

**Exemple 3.** On considère les ensembles $S$ et $T$ définis en extension par $S = \{a, b, c\}$ et $T = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta\}$. La fonction $f$ de $S$ dans $T$ définie par $f(a) = f(b) = \alpha$, $f(c) = \zeta$ peut être illustrée de la façon suivante, chaque correspondance entre un élément de $S$ et l'élément de $T$ qui lui est associé par $f$ étant matérialisée par une flèche :



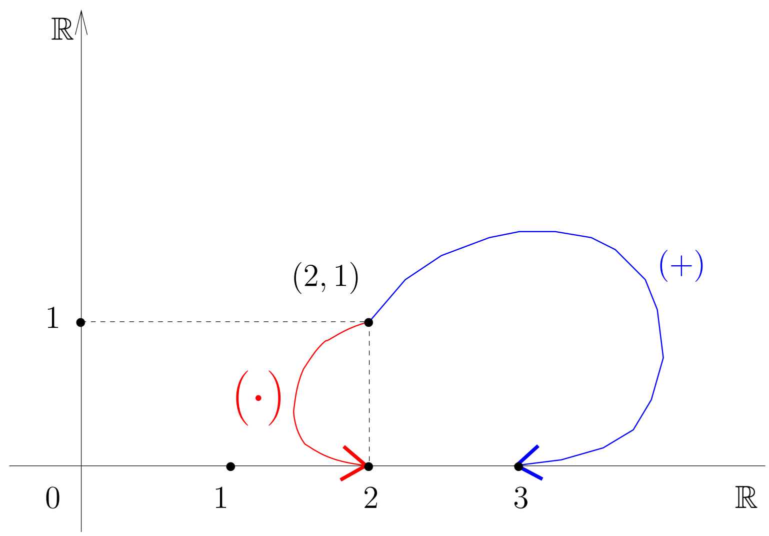

Ici $Dom(f) = S$ et $Im(f) = \{\alpha, \zeta\}$.

■

**Exemple 4.** Les opérations classiques "addition" et "multiplication" sur l'ensemble des réels sont définies par des applications de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{+} & \mathbb{R} \\ (a,b) & \longrightarrow & a+b \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\cdot} & \mathbb{R} \\ (a,b) & \longrightarrow & a{\cdot}b \text{ ou } ab \end{array}$$

Ces opérations qui associent à un couple ordonné de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ une valeur réelle, peuvent être illustrées comme suit :




Nous avons ici, bien évidemment, $Dom(+) = Dom(\cdot) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $Im(+) = Im(\cdot) = \mathbb{R}$. ■

**Définitions.** Soit $f$ une fonction d'un ensemble $S$ vers l'ensemble $T$. Si $Im(f) = T$ nous dirons que la fonction est ***surjective***. Si pour chaque $t \in Im(f)$ il n'y a qu'un seul $s \in S$ tel que $f(s) = t$ alors nous dirons que $f$ est ***injective***. Si $f$ est à la fois injective et surjective on dira qu'elle est ***bijective*** ou qu'elle met en bijection les ensembles $Dom(f)$ et $T$ ou que $f$ est une bijection de $Dom(f)$ sur $T$. De plus, si $Dom(f) = S$, on dira que $f$ met en bijection les ensembles $S$ et $T$.

La fonction $f(x) = x^2 - 2$ de l'Exemple 1 n'est pas surjective puisque son image est l'intervalle $[-2, +\infty) \neq \mathbb{R}$. La fonction $f(x) = \ln(x)$ de l'Exemple 2 est surjective car pour chaque $t \in \mathbb{R}$ il existe un réel $s > 0$ tel que $\ln(s) = t$. De plus, comme elle est strictement croissante ($s_1 < s_2$ implique $\ln(s_1) < \ln(s_2)$), il en découle qu'elle est injective. Cette fonction logarithme est donc une bijection de son domaine de définition (l'ensemble des réels $> 0$) sur son image (l'ensemble des réels).

L'importance de la propriété d'injectivité, pour une fonction, est qu'elle permet de définir la notion de fonction réciproque. Supposons que $f$ soit une fonction injective d'un ensemble $S$ vers un ensemble $T$. Nous définissons $f^{-1}$, appelée fonction réciproque de $f$, comme la fonction de $T$ vers $S$ dont le domaine de définition est $Im(f)$, et telle que pour chaque

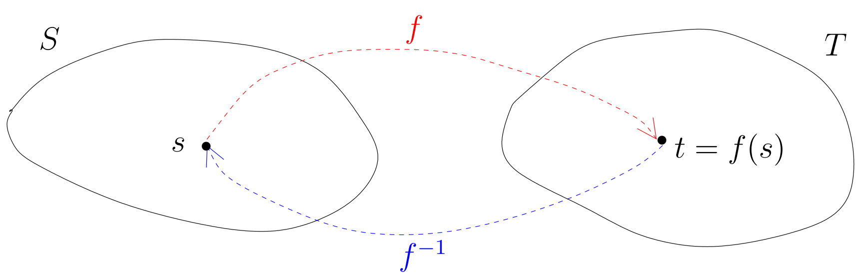
$t \in Im(f)$, la valeur de $f^{-1}$ en $t$ est l'unique élément $s \in S$ tel que $f(s) = t$. Les fonctions $f$ et $f^{-1}$ sont en relation comme suit. Pour chaque $t \in Im(f)$ nous avons

$$f(f^{-1}(t)) = t$$

et pour chaque $s \in Dom(f)$ nous avons

$$f^{-1}(f(s)) = s\,.$$

Il est clair que $f^{-1}$ est aussi injective et que la fonction réciproque de $f^{-1}$ est la fonction originelle $f$.




La plupart des fonctions qu'on considérera par la suite sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas il y a plusieurs manières de fabriquer de nouvelles fonctions à partir de deux fonctions données $f$ et $g$. Nous définissons la ***somme*** des fonctions $f$ et $g$, $f+g$, par

$$(f+g)(x) \equiv f(x) + g(x)$$

sur le domaine

$$Dom(f+g) \equiv Dom(f) \bigcap Dom(g)\,.$$

Nous définissons le ***produit*** des fonctions $f$ et $g$, $fg$, par

$$(fg)(x) \equiv f(x)g(x)$$

sur le même domaine de définition que précédemment. Enfin, nous définissons la ***composition*** de deux fonctions $f$ et $g$, notée $f \circ g$, par

$$f \circ g(x) \equiv f(g(x))$$

sur le domaine de définition

$$Dom(f \circ g) \equiv \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad x \in Dom(g) \quad \text{et} \quad g(x) \in Dom(f)\}\,.$$

Ainsi pour calculer la valeur de $f \circ g$ en $x$, nous calculons d'abord le nombre $g(x)$ et ensuite nous calculons $f(g(x))$. La raison de l'expression compliquée de $Dom(f \circ g)$ est que $x$ doit être dans $Dom(g)$ et $g(x)$ dans $Dom(f)$ pour que $f \circ g(x)$ ait un sens. Notons que $f \circ g$ et $g \circ f$ ne représentent pas la même fonction comme l'illustre l'exemple ci-après.

**Exemple 5.** Soit $f$ la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ avec $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad x \neq 0\}$ et définissons la fonction $g$ par $g(x) = \sin(x)$, (on suppose connues les propriétés de la fonction trigonométrique sinus). Le domaine de $g$ est $\mathbb{R}$ tout entier et le domaine de $f \circ g$ est l'ensemble des réels $x$ tels que $g(x) \neq 0$ puisque $0 \notin Dom(f)$. Il en découle que

$$Dom(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots\}$$

et

$$f \circ g(x) = \frac{1}{\sin(x)}\,.$$

D'un autre côté, puisque $\sin(x)$ est définie sur tout $\mathbb{R}$, on a

$$Dom(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad x \neq 0\}$$

avec

$$g \circ f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

On voit bien que $f \circ g$ et $g \circ f$ ne représentent pas les mêmes fonctions.

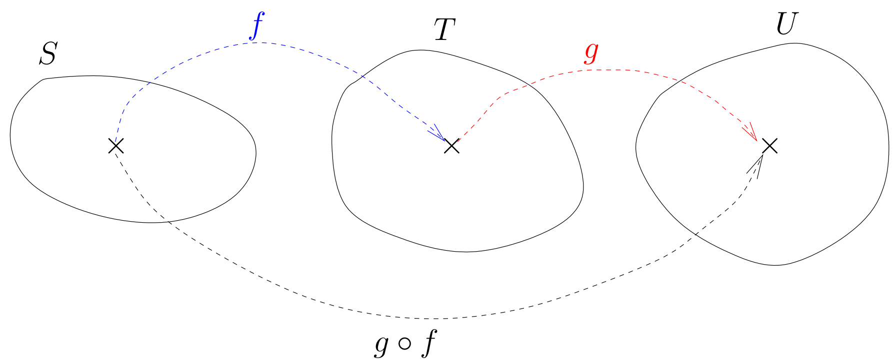
■

## 2 Cardinal d'un ensemble

Deux ensembles $S$ et $T$ ont le même nombre d'éléments, on dit encore le même ***cardinal***, s'il existe une fonction $f$ qui met en bijection les ensembles $S$ et $T$.

**Résultat 2.1.** *Soit $S$, $T$ et $U$ des ensembles. Si $S$ et $T$ ont le même cardinal et si $T$ et $U$ ont également le même cardinal, il est clair que $S$ et $U$ ont aussi le même cardinal.*

**Preuve.** Si $f$ est la bijection de $S$ sur $T$ et $g$ celle de $T$ sur $U$, la fonction $g \circ f$ est évidemment une bijection de $S$ sur $U$. En effet on a $Dom(g \circ f) = S = Dom(f)$, $Im(f) = T$ et $Im(g \circ f) = U = Im(g)$ par hypothèse. Donc $g \circ f$ est surjective de $S$ sur $U$. Elle est aussi injective : si $u \in U$, il existe par hypothèse un unique $t \in T$ tel que $g(t) = u$ et un unique $s \in S$ tel que $f(s) = t$ ; d'où l'existence d'un unique $s \in S$ tel que $g \circ f(s) = g(f(s)) = g(t) = u$. Par définition $S$ et $T$ ont donc le même cardinal.



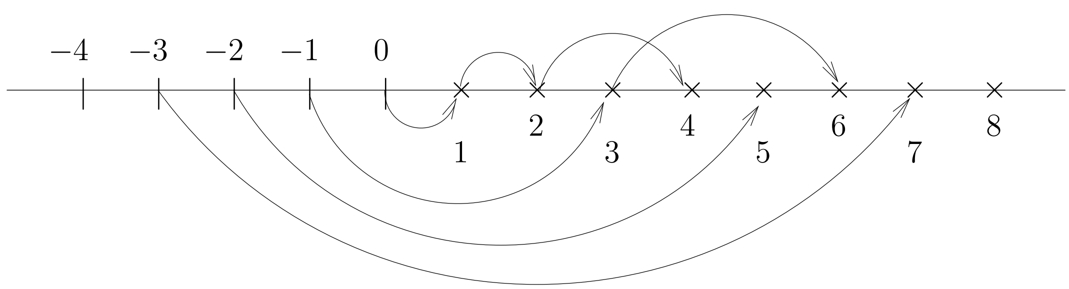
Un ensemble est appelé ***fini*** s'il est non vide et s'il a le même cardinal que l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ pour un certain entier naturel non nul $n$. Dans le cas contraire il est appelé ***infini***. Cette définition formalise ce que nous faisons habituellement quand nous voulons déterminer la taille d'un ensemble fini : nous comptons. C'est à dire que nous réalisons une correspondance bijective entre les éléments de l'ensemble et les entiers 1, 2, 3, …, $n$ jusqu'à épuisement des éléments de l'ensemble ($n$ est alors la taille de l'ensemble fini). Qu'en est-il de la taille d'un ensemble quand il est infini ? C'est un sujet délicat que nous essayons d'aborder maintenant.

On dira d'abord qu'un ensemble infini est ***dénombrable*** s'il a le même cardinal que $\mathbb{N}^\star$ l'ensemble des entiers naturels positifs.

**Exemple 1.** Soit l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Nous allons montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable. En effet, il est facile de vérifier que la fonction $f$, définie sur $\mathbb{Z}$ et d'image $\mathbb{N}^\star$, telle que

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{si} \quad n \geq 1 \\ 1 - 2n & \text{si} \quad n \leq 0 \end{cases}$$

est une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}^\star$ qui envoie les entiers de $\mathbb{N}^\star$ sur les entiers naturels pairs et les entiers négatifs ou nuls de $\mathbb{Z}$ sur les entiers naturels impairs.




Notons que, selon la définition, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^\star$ ont même cardinal alors que $\mathbb{N}^\star$ est strictement contenu dans $\mathbb{Z}$.

■

**Résultat 2.2.** *Si $S$ est un sous-ensemble infini d'un ensemble dénombrable $T$, alors $S$ est dénombrable.*

**Preuve.** L'ensemble $T$ étant dénombrable il existe une bijection $f$ de $\mathbb{N}^\star$ sur $T$. Les éléments de $S$ sont un sous-ensemble de $T = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}^\star\}$. Soit $n_1$ le plus petit entier dans $\mathbb{N}^\star$ tel que $f(n_1) \in S$. Puis posons $n_2$ le plus petit entier plus grand que $n_1$ tel que $f(n_2) \in S$. En continuant indéfiniment de cette manière on définit $n_k$ le plus petit entier plus grand que $n_{k-1}$ tel que $f(n_k) \in S$. Il est facile de vérifier que la fonction $g$ définie par

$$k \in \mathbb{N}^\star \quad \xrightarrow{g} \quad f(n_k) \in S$$

est une bijection de $\mathbb{N}^\star$ sur $S$. Il s'ensuit que $S$ est dénombrable.

**Résultat 2.3.** *Si $S$ et $T$ sont des ensembles dénombrables alors l'ensemble produit $S \times T$ est aussi dénombrable.*

**Preuve.** Puisque $S$ et $T$ sont dénombrables, il existe des bijections $f$ et $g$ de $\mathbb{N}^\star$ sur respectivement $S$ et $T$. Chaque élément de $S \times T$ est de la forme $(f(n), g(m))$ pour des valeurs particulières $n$ et $m$ de $\mathbb{N}^\star$. Soit $h$ la fonction définie sur $S \times T$ à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}^\star$ telle que

$$(f(n), g(m)) \quad \xrightarrow{h} \quad 2^n 3^m \ .$$

Par le Théorème fondamental de l'arithmétique (cf. ci-après), $h$ donne une correspondance bijective entre $S \times T$ et un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}^\star$. Selon le Résultat 2.2 cet ensemble infini est dénombrable. Ainsi, grâce au Résultat 2.1, nous concluons que $S \times T$ est dénombrable.

Nous avons eu besoin dans le résultat précédent du Théorème fondamental de l'arithmétique que nous donnons à présent sans démonstration. Définissons d'abord un ***nombre premier*** comme un entier naturel plus grand que 1 qui n'a pas de diviseur autre que 1 et lui-même. Un début de la liste ordonnée des nombres premiers est 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ....

**Théorème 2.4 (Théorème fondamental de l'arithmétique).** *Chaque entier naturel positif $N \geq 2$ peut être écrit de façon unique comme un produit fini de puissances entières strictement positives de nombres premiers :*

$$N = p_1^{s_1}\, p_2^{s_2}\, \ldots\, p_n^{s_n} \ .$$

Par exemple l'entier 18 est égal au produit $2^1 \cdot 3^2$ et c'est la seule façon de l'écrire avec des nombres premiers.
En utilisant les résultats précédents nous allons montrer que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable.

**Théorème 2.5.** *L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable.*

**Preuve.** Chaque nombre rationnel positif peut-être écrit sous la forme $\frac{m}{n}$, avec $m, n \in \mathbb{N}$ et $n \neq 0$, la fraction $\frac{m}{n}$ étant irréductible ($m$ et $n$ n'ont pas de facteur commun). La fonction $f$ définie par

$$\frac{m}{n} \quad \xrightarrow{f} \quad (m, n)$$

donne une correspondance bijective entre $\mathbb{Q}^{\star +}$, l'ensemble des rationnels strictement positifs, et un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$. Puisque $\mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ est dénombrable (cf. Résultat 2.3), les Résultats 2.1 et 2.2 nous assurent que $\mathbb{Q}^{\star +}$ est dénombrable. En adaptant un peu, on montre de la même façon que $\mathbb{Q}^{\star -}$, l'ensemble des rationnels strictement négatifs, est dénombrable. Puisque $\mathbb{Q}$ peut être écrit comme la réunion $\mathbb{Q}^{\star -} \bigcup \{0\} \bigcup \mathbb{Q}^{\star +}$, c'est un ensemble infini dénombrable comme réunion finie d'ensembles dont chacun est, soit fini, soit infini dénombrable (résultat admis).

Tous les ensembles infinis que nous avons considérés jusqu'ici sont dénombrables. Il n'en va pas toujours ainsi comme le prouve le théorème suivant qui peut paraître surprenant.

**Théorème 2.6.** *Soit $S = ]0,1[$ l'ensemle des nombres réels strictement compris entre 0 et 1. L'ensemble $S$ est un ensemble infini non dénombrable.*

**Preuve.** Remarquons d'abord que $S$ n'est pas fini car tous les réels de la forme $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$, sont différents et appartiennent à $S$.
Dans cette démonstration nous utilisons des propriétés concernant le développement décimal des nombres réels que nous introduirons au Chapitre 1, §1. Chaque réel $x$ de l'intervalle $[0,1]$ a un développement décimal $x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots$ avec $x_i$ entier compris entre 0 et 9. Chaque développement décimal correspond à un nombre réel différent excepté pour les développements se terminant par des 0 qui correspondent à des nombres qui peuvent aussi se représenter par un développement décimal se terminant par des 9. Par exemple $\frac{1}{2}$ peut être écrit $0,5\underline{0}00\ldots$ ou $0,4\underline{9}99\ldots$.

La démonstration se fait par l'absurde (cf §3). On suppose que $]0,1[$ est dénombrable. Alors, dans ce cas, il existe une bijection $f$ de $\mathbb{N}^\star$ sur $]0,1[$. Notons $x_j^{(n)}$ le j-ième entier dans le développement décimal de $f(n)$. C'est à dire

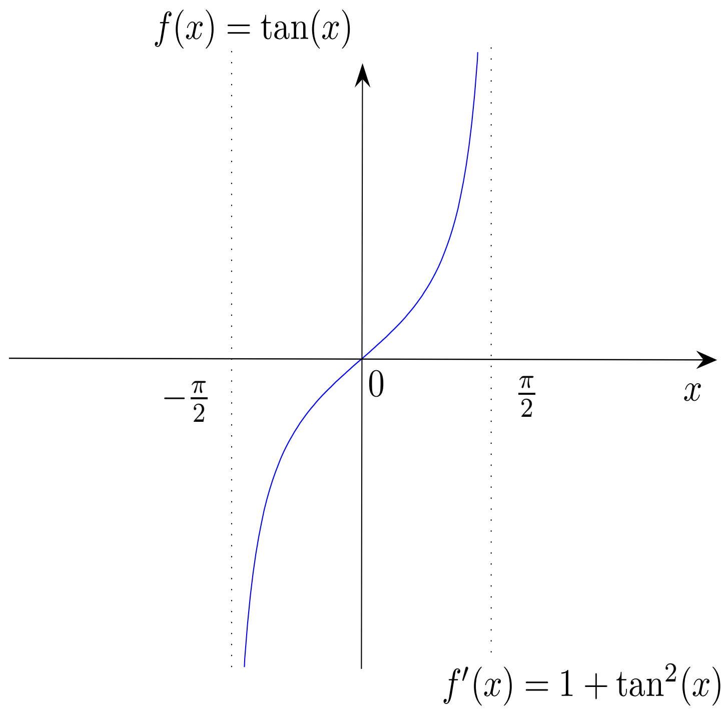
$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & 0, x_1^{(1)}\, x_2^{(1)}\, x_3^{(1)} \ldots x_j^{(1)} \ldots \\ f(2) & = & 0, x_1^{(2)}\, x_2^{(2)}\, x_3^{(2)} \ldots x_j^{(2)} \ldots \\ \vdots & = & \\ f(n) & = & 0, x_1^{(n)}\, x_2^{(n)}\, x_3^{(n)} \ldots x_j^{(n)} \ldots \\ \vdots & = & \end{array}$$

Nous déterminons maintenant une suite d'entiers $y_1$, $y_2$, $y_3$, $\ldots$ comme suit. On choisit $y_1$ comme n'importe quel entier entre 2 et 8 qui n'est pas égal à $x_1^{(1)}$. On choisit $y_2$ égal à n'importe quel entier entre 2 et 8 qui n'est pas égal à $x_2^{(2)}$. En continuant de cette façon on choisit $y_n$ égal à n'importe quel entier entre 2 et 8 qui n'est pas égal à $x_n^{(n)}$. Le développement décimal

$$y \equiv 0, y_1 y_2 \ldots y_n \ldots$$

correspond à un unique nombre réel compris strictement entre 0 et 1 puisqu'il ne se termine ni par des 0 ni par des 9. Cependant $y$ n'est pas égal à $f(1)$ puisque le développement décimal de $y$ diffère de celui de $f(1)$ en première position. Par ailleurs $y$ ne peut être égal à $f(2)$ puisque son développement décimal diffère de celui de $f(2)$ en deuxième position. En continuant de cette façon on constate que $y$ diffère de n'importe quel $f(n)$, $n \in \mathbb{N}^\star$, donc $y$ ne peut appartenir à l'image de $f$. Nous aboutissons donc à une contradiction puisque nous avons supposé que $Im(f) = ]0,1[$. Il en découle qu'une telle bijection $f$ ne peut exister et que $]0,1[$ n'est pas dénombrable.

Un ensemble infini qui n'est pas dénombrable est dit ***non-dénombrable*** ou qu'il a la ***puissance du continu*** (comme on dit que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{N}$ ont la puissance du dénombrable). Puisque $\mathbb{R}$ contient l'intervalle $]0,1[$, $\mathbb{R}$ est aussi non-dénombrable. En fait $\mathbb{R}$ peut être mis en bijection avec l'intervalle $]0,1[$. En effet, considérons la fonction $f(x) = \tan(x)$ définie sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Le graphe de $f$ montre que la fonction tangente est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. Puisque la fonction $g(x) = \pi x - \frac{\pi}{2}$ est une bijection de l'intervalle $]0,1[$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, la composition $f \circ g$ donne une correspondance bijective entre $]0,1[$ et $\mathbb{R}$. En conséquence $]0,1[$ et $\mathbb{R}$ ont la même puissance, celle du continu.




On a dit précédemment qu'une réunion finie d'ensembles dénombrables est dénombrable. Ce résultat général est admis ; il a été illustré par l'Exemple 1. Puisque $\mathbb{R}$ est la réunion des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ et des nombres irrationnels et que les nombres rationnels forment un ensemble dénombrable, les nombres irrationnels sont nécessairement non-dénombrables. En ce sens, il y a beaucoup plus de nombres irrationnels que de nombres rationnels.
Toutes les notions développées dans cette partie ont été introduites par Georg CANTOR (1845-1918) au XIX ème siècle.

# 3 Démonstrations en mathématique et éléments de logique

Apprendre à établir des démonstrations, ou preuves, est une étape indispensable quand on débute en mathématiques. Souvent un résultat ou théorème peut être démontré de plusieurs façons et on tirera beaucoup de profit à comparer plusieurs démonstrations entre elles. La construction de démonstrations mathématiques correctes et élégantes est un travail difficile, qui nécessite de la réflexion et qui apporte beaucoup de satisfactions

quand il est réussi.
Un énoncé type de théorème consiste en un ensemble , $P$, de déclarations dites ***hypothèses*** et un ensemble, $Q$, de déclarations appelées ***conclusions***. L'énoncé du théorème est que si les déclarations de $P$ sont vraies (la proposition $P$ est vraie) alors il s'ensuit que les déclarations de $Q$ sont vraies également (la proposition $Q$ est vraie). Et démontrer le théorème revient à prouver cette implication logique. Si la preuve est établie, on dit en résumé que $P$ implique $Q$ (et on note $P \Rightarrow Q$). Les Résultats 2.1, 2.2 et 2.3 ont exactement cette forme. Quelquefois un énoncé de théorème ne contient que les conclusions $Q$. C'est le cas pour le Théorème 2.5 et le Théorème fondamental de l'arithmétique. C'est pour faire court quand on suppose que le lecteur connaît les hypothèses $P$. Par exemple pour le Théorème 2.5 les hypothèses non écrites sont : 1) les nombres réels satisfont les propriétés qui en font un corps commutatif (cf Chapitre 1, §1.) ; 2) $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des réels de la forme $\frac{m}{n}$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}^\star$. La première hypothèse pourrait figurer dans la liste des hypothèses de chaque théorème de cette partie du cours, mais cela alourdirait l'énoncé, aussi cette hypothèse est-elle implicite. La seconde hypothèse n'est autre que la définition de l'ensemble $\mathbb{Q}$.
Il est très important de noter qu'un théorème qui affirme que $P$ implique $Q$ n'affirme pas que l'une ou l'autre de ces propositions est vraie. Il affirme seulement que si $P$ est vraie alors $Q$ l'est aussi. Par ailleurs, le fait que $P$ implique $Q$ (proposition directe) ne signifie pas que $Q$ implique $P$ qui est appelé la ***proposition réciproque***. Par exemple considérons l'ensemble des élèves d'une certaine classe d'un certain lycée. Soit $P$ la proposition '$x$ est un garçon' et $Q$ la proposition '$x$ est blond'. On suppose que $P$ implique $Q$ (tous les garçons de la classe sont blonds) ; cela ne signifie pas que $Q$ implique $P$ (un membre $x$ de la classe peut être une fille blonde).
Dans le cas où $P$ implique $Q$ et $Q$ implique $P$, nous disons que $P$ et $Q$ sont des ***propositions équivalentes*** ou que $P$ est vraie si et seulement si $Q$ est vraie (et on note $P \Leftrightarrow Q$). Si $P$ implique $Q$ nous disons que $P$ est la ***condition suffisante*** pour $Q$, parce que si $P$ est vraie alors $Q$ l'est également. Si $Q$ implique $P$ nous disons que $P$ est une ***condition nécessaire*** pour $Q$ car $Q$ ne peut pas être vraie sans que $P$ le soit. Ainsi, dire que $P$ est à la fois condition nécessaire et suffisante pour $Q$ revient à dire que $P$ et $Q$ sont équivalentes (elles sont simultanément vraies ou simultanément fausses).
La proposition 'non $P$' est une proposition qui est vraie quand la proposition $P$ est fausse et qui est fausse quand $P$ est vraie. Et si $P$ consiste en un ensemble d'hypothèses, alors $P$ aura la valeur fausse si au moins une de ces hypothèses est fausse.
Les propositions '$P$ implique $Q$' et 'non $Q$ implique non $P$' sont logiquement équivalentes, c'est à dire que si l'une est vraie l'autre l'est aussi et inversement. C'est ce que nous voyons maintenant. Supposons que $P \Rightarrow Q$ et que non $Q$ est vraie ; si non $P$ est fausse alors $P$ est vraie ce qui impliquerait que $Q$ est vraie d'où une contradiction. Donc non $P$ doit être vraie et on a bien non $Q \Rightarrow$ non $P$. Supposons maintenant que non $Q \Rightarrow$ non $P$ et que $P$ est vraie ; alors $Q$ doit être vraie sinon non $P$ serait vraie (puisque non $Q$ entraîne non $P$) ce qui ne peut être ; ainsi on a bien $P \Rightarrow Q$.
Cette équivalence logique de '$P \Rightarrow Q$' et 'non $Q \Rightarrow$ non $P$' nous donne donc deux moyens pour prouver que $P$ implique $Q$. Il y a la ***preuve directe*** qui consiste à supposer $P$ vraie et à prouver que $Q$ l'est aussi. Et il y a la ***preuve par contraposition*** qui consiste à supposer non $Q$ vraie et à montrer que non $P$ est vraie, c'est à dire à montrer l'implication non $Q \Rightarrow$ non $P$ qu'on appelle ***proposition contraposée*** de la proposition initiale

$P \Rightarrow Q$.
Nous donnons à la fois une preuve directe et par contraposition pour le résultat de l'exemple suivant.

**Exemple 1.** Supposons que $x$ est un nombre réel vérifiant les inégalités strictes $x^2-x > 0$ et $x > 0$. Alors ce réel vérifie l'inégalité $x > 1$.
Démonstration directe : supposons que $x^2-x > 0$ et $x > 0$. Puisque $x(x-1) = x^2-x \neq 0$, ni $x$ ni $x-1$ ne peut être nul ; puisque leur produit est positif ils sont tous les deux positifs ou tous les deux négatifs. Comme $x$ est positif $x-1$ doit l'être aussi ; c'est à dire $x-1 > 0$ ou encore $x > 1$.
Démonstration par contraposition : supposons non $Q$ vraie, c'est à dire $x \leq 1$ ; nous désirons montrer que non $P$ est vraie c'est à dire que les propriétés $x^2-x > 0$ et $x > 0$ ne sont pas vraies simultanément. Si $x > 0$, alors en multipliant $x \leq 1$ par $x$ nous obtenons $x^2 \leq x$ ce qui implique $x^2 - x \leq 0$. Maintenant supposons $x^2 - x = x(x-1) > 0$ alors puisque $x - 1 \leq 0$, nous devons avoir $x < 0$ puisque le produit $x(x-1)$ est positif. Ainsi $x^2 - x > 0$ et $x > 0$ ne peuvent être vraies simultanément, donc non $P$ est vraie.

■

**Exemple 2.** Soit $m$ un entier naturel quelconque. Si $m^2$ est un nombre pair alors $m$ est aussi pair.
Démonstration par contraposition : on remarque tout d'abord que l'ensemble des naturels se décompose en la réunion des entiers pairs et impairs

$$\mathbb{N} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\} \bigcup \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\} .$$

Supposons non $Q$, à savoir $m$ est impair ; $m$ s'écrit donc $m = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$ d'où $m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1 = 2l+1$ ce qui montre que $m^2$ est impair (c'est non $P$).

■

Une méthode de preuve très répandue est la ***démonstration par l'absurde***. Pour montrer que $P$ implique $Q$ on suppose que $P$ est vraie et que $Q$ n'est pas vraie et on montre alors que cela conduit à une contradiction (ou une absurdité). La preuve du Théorème 2.6 est une preuve par l'absurde. Au Chapitre 1, §1 nous donnons une démonstration par l'absurde du résultat : 'le réel $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel'. Cette démonstration a été créée dans l'antiquité par Euclide il y a plus de 2000 ans.

Une autre méthode de démonstration est la ***démonstration par récurrence*** que nous expliquons maintenant. Supposons que pour tout entier $n$ positif, $Q(n)$ soit une proposition dépendant de $n$. Nous voulons montrer que $Q(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On établit que $Q(1)$ est vraie et nous montrons, pour un entier positif $k$ quelconque, que si $Q(k)$ est vraie alors $Q(k+1)$ l'est aussi. La proposition $Q(k)$ vraie est appelée l'***hypothèse de récurrence***. La proposition '$Q(k)$ implique $Q(k+1)$' est l'***étape de récurrence***. Puisque $Q(1)$ est vraie, nous concluons de l'étape de récurrence que $Q(2)$ est vraie. Puisque $Q(2)$

est vraie, nous concluons, en vertu de l'étape de récurrence, que $Q(3)$ l'est aussi. En itérant de cette manière nous montrons que $Q(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Ainsi une démonstration par récurrence consiste donc à vérifier $Q(1)$ et à prouver l'étape de récurrence. Dans le résultat suivant nous en donnons un exemple simple tiré de la théorie des nombres.

**Résultat 3.0.1.** *Si $n$ est un entier positif alors on a l'égalité*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (E)$$

**Preuve.** Ici $Q(n)$ est l'égalité $(E)$. $Q(1)$ est vraie puisque $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$. Supposons maintenant que $Q(k)$ soit vraie pour $k$ entier naturel quelconque, c'est à dire $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Alors, avec cette hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ &= (k+1)(\frac{k}{2} + 1) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} . \end{aligned}$$

Nous venons de montrer que si $Q(k)$ est vraie alors $Q(k+1)$ l'est aussi. Il en découle, par récurrence, que $Q(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

**Quantificateurs.** Pour écrire des énoncés ou propositions en mathématiques on a souvent recours au ***quantificateur universel*** $\forall$ (pour tout, ou, quel que soit) et au ***quantificateur existentiel*** $\exists$ (il existe au moins un). Par exemple la proposition (vraie) 'tout entier multiple de 6 est multiple de 2' peut s'écrire sous la forme :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad (6 \text{ divise } n \Rightarrow 2 \text{ divise } n) .$$

Et la proposition 'il existe un nombre réel dont le carré est 2' peut s'écrire :

$$(\exists x \in \mathbb{R}) \qquad (x^2 = 2) .$$

La plupart des énoncés mathématiques demandent pour être correctement formulés l'usage successif de plusieurs quantificateurs. Par exemple la proposition 'tout nombre complexe admet une racine carrée' se traduit par :

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \qquad (\exists u \in \mathbb{C}) \qquad (u^2 = z)$$

ou

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \qquad (\exists u \in \mathbb{C}\ ;\ u^2 = z) .$$

Deux quantificateurs de même nature qui se suivent dans une proposition peuvent être intervertis. Ainsi la proposition

$$(\forall x \geq 0) \qquad (\forall y \geq 0) \qquad (x + y \geq 0)$$

a le même sens que

$$(\forall y \geq 0) \qquad (\forall x \geq 0) \qquad (x + y \geq 0) \; .$$

Mais ceci tombe en défaut dès qu'il s'agit de quantificateurs de nature différente : dans une proposition mathématique on ne peut pas intervertir les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ sans en changer le sens. Ainsi, par exemple

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad (\exists y \in \mathbb{R}) \qquad (x + y = 0)$$

et

$$(\exists y \in \mathbb{R}) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}) \qquad (x + y = 0)$$

n'ont pas du tout la même signification. La première proposition est vraie car pour tout réel $x$ il existe un réel $y$ $(= -x)$ tel que $x + y = 0$. La seconde est manifestement fausse car il ne peut exister une valeur réelle $y$ telle que $x + y = 0$ pour tout élément $x$ de $\mathbb{R}$.

**Les connecteurs logiques et tables de vérité.** Ils permettent de relier deux propositions élémentaires pour en faire une seule plus complexe. Commençons par le "<u>et</u>". Si $P$ et $Q$ sont deux propositions, '$P$ <u>et</u> $Q$' est une nouvelle proposition qui, par définition, est vraie lorsque les propositions $P$ et $Q$ sont toutes les deux vraies, et fausse dans tous les autres cas. Voici ce que l'on appelle la table de vérité du "<u>et</u>" :

| $P$ | $Q$ | $P$ <u>et</u> $Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

.

Terminologie : La proposition '$P$ <u>et</u> $Q$' est encore appelée conjonction de $P$ et $Q$.

Par exemple si $P$ est la proposition '12 est divisible par 2' et $Q$ '12 est divisible par 3', la proposition '$P$ <u>et</u> $Q$' correspond à '12 est divisible par 2 et par 3' et toutes ces propositions sont vraies.

Poursuivons par le connecteur "<u>ou</u>". Si $P$ et $Q$ sont deux propositions, '$P$ <u>ou</u> $Q$' est une nouvelle proposition, vraie dès que l'une au moins des deux propositions $P$ et $Q$ est vraie. Voici la table de vérité du "<u>ou</u>" :

| $P$ | $Q$ | $P$ <u>ou</u> $Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

.

Terminologie : La proposition '$P$ ou $Q$' est encore appelée disjonction de $P$ et de $Q$.

**Exemple 3.** Soit $n$ un entier naturel et les deux propositions $P(n)$ : '$n$ est pair' et $Q(n)$ : '$n$ est impair'. La proposition '$P(n)$ ou $Q(n)$' est vraie pour tout entier $n$ alors que la proposition '$P(n)$ et $Q(n)$' est toujours fausse (tout entier naturel est soit pair soit impair). Ceci est illustré par la table de vérité suivante :

| $P(n)$ | $Q(n)$ | $P(n)$ ou $Q(n)$ | $P(n)$ et $Q(n)$ |
|---|---|---|---|
| V | F | V | F |
| F | V | V | F |

■

Concernant les propositions $P$ et $Q$ nous avons expliqué précédemment ce que signifie '$P$ implique $Q$' que nous avons noté '$P \Rightarrow Q$'. Le symbole ***implication*** "$\Rightarrow$" est en fait un connecteur qui définit une nouvelle proposition à partir de $P$ et de $Q$. La proposition '$P \Rightarrow Q$' est, par définition, la proposition 'non $P$ ou $Q$' dont voici la table de vérité :

| $P$ | non $P$ | $Q$ | non $P$ ou $Q$ | $P \Rightarrow Q$ | non $Q$ | non $Q \Rightarrow$ non $P$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | F | V | V | V | F | V |
| V | F | F | F | F | V | F |
| F | V | V | V | V | F | V |
| F | V | F | V | V | V | V |

et l'on retrouve bien le fait que '$P \Rightarrow Q$' est vrai lorsque $P$ étant vrai $Q$ l'est aussi (mais pas seulement) et faux lorsque $P$ étant vrai $Q$ est faux. Dans cette table on vérifie également l'équivalence logique entre les propositions $P \Rightarrow Q$ et non $Q \Rightarrow$ non $P$ dont on a parlé plus haut.

Le dernier connecteur logique est l'***équivalence*** noté "$\Leftrightarrow$". Si $P$ et $Q$ sont des propositions, on dira que $P$ est équivalente à $Q$, et on notera '$P \Leftrightarrow Q$', si on a à la fois '$P \Rightarrow Q$' et '$Q \Rightarrow P$'. Voici la table de vérité permettant de déterminer les valeurs de la proposition '$P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$' selon les valeurs des propositions $P$ et $Q$ :

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ | $Q \Rightarrow P$ | $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | F | F |
| F | V | V | F | F | F |
| F | F | V | V | V | V |

.

On notera que la proposition '$P \Leftrightarrow Q$' est vraie lorsque $P$ et $Q$ sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses et seulement dans ces cas là.

**Négation d'une proposition.** Soit $P$ une proposition. On a vu que la négation de $P$, notée 'non $P$', est la proposition qui prend la valeur vraie lorsque $P$ est fausse et la valeur fausse quand $P$ est vraie.
Si $P$ et $Q$ sont des propositions, voici quelques règles à retenir concernant des propositions logiques écrites avec $P$ et $Q$ et impliquant la négation.

***Règle 1 :*** La négation de '$P$ et $Q$' est 'non $P$ ou non $Q$' comme le confirme le tableau de vérité suivant :

| non ( $P$ et $Q$ ) | $P$ | $Q$ | $P$ et $Q$ | non $P$ | non $Q$ | non $P$ ou non $Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| F | V | V | V | F | F | F |
| V | V | F | F | F | V | V |
| V | F | V | F | V | F | V |
| V | F | F | F | V | V | V |

**Exemple 4.** Si $P(n)$ est la proposition 'l'entier $n$ est multiple de 14', on peut écrire $P(n)$ sous la forme '$n$ est multiple de 2' et '$n$ est multiple de 7' ; d'où l'écriture de la négation de $P$ : '$n$ n'est pas multiple de 2' ou '$n$ n'est pas multiple de 7'.

■

***Règle 2 :*** La négation de '$P$ ou $Q$' est 'non $P$ et non $Q$' et voici la table de vérité :

| non ( $P$ ou $Q$ ) | $P$ | $Q$ | $P$ ou $Q$ | non $P$ | non $Q$ | non $P$ et non $Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| F | V | V | V | F | F | F |
| F | V | F | V | F | V | F |
| F | F | V | V | V | F | F |
| V | F | F | F | V | V | V |

.

**Exemple 5.** Si $P(n)$ est la proposition 'l'entier $n$ est pair' et $Q(n)$ la proposition 'l'entier $n$ est impair', la négation de '$P(n)$ ou $Q(n)$' est 'l'entier $n$ est impair et $n$ est pair' et cette proposition est toujours fausse. La proposition '$P(n)$ ou $Q(n)$' est donc, elle, toujours vraie.

■

***Règle 3 :*** $P$ et $Q$ étant deux propositions, la négation de '$P \Rightarrow Q$' est la proposition '$P$ et non $Q$' comme l'indique la table suivante :

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ | non $(P \Rightarrow Q)$ | non $Q$ | $P$ <u>et</u> non $Q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | F | F |
| V | F | F | V | V | V |
| F | V | V | F | F | F |
| F | F | V | F | V | F |

.

**Exemple 6.** Pour $n$ entier naturel, soit $P(n)$ la proposition '$n^2$ est pair' et $Q(n)$ la proposition '$n$ est pair'. On a vu dans l'Exemple 2 que la proposition '$P(n) \Rightarrow Q(n)$' est vraie. Comme non $Q(n)$ est '$n$ est impair', la négation de l'implication précédente s'écrit '$n^2$ est pair <u>et</u> $n$ est impair' et cette proposition est fausse (si $n^2$ est pair $n$ l'est aussi).

■

En ce qui concerne la négation de propositions faisant intervenir des quantificateurs la règle est la suivante, sachant que, pour un élément $x$ d'un ensemble $E$, on note $P(x)$ et $Q(x)$ des propositions concernant $x$.

***Règle 4 :*** La négation de '$(\forall x \in E)\ (P(x))$' est '$(\exists x \in E)$ (non $P(x)$)'. De même la négation de '$(\exists x \in E),\ Q(x))$' est '$(\forall x \in E)$ (non $Q(x)$)'.

**Exemple 7.** Soit la proposition, manifestement fausse, '$(\forall n \in \mathbb{N})$ ($n$ est divisible par 2)' ; sa négation s'écrit '$(\exists n \in \mathbb{N})$ ($n$ n'est pas divisible par 2)' et cette proposition est vraie ($n = 3$ convient).

■

**Exemple 8.** Revenons sur la situation évoquée en début de paragraphe avec $E$ l'ensemble des élèves d'une certaine classe d'un certain lycée. Soit $P(x)$ la proposition 'l'élève $x$ est un garçon' et $Q(x)$ la proposition 'l'élève $x$ est blond'. La proposition 'tous les garçons de la classe sont blonds' s'écrit

$$(\forall x \in E) \quad (P(x) \Rightarrow Q(x))\ .$$

La négation de cette proposition est 'il existe un élève de la classe qui soit un garçon et non blond' c'est à dire

$$(\exists x \in E) \quad (P(x)\ \underline{\text{et}}\ \text{non}\ Q(x))$$

et l'on retrouve bien la Règle 4 car 'non $(P(x) \Rightarrow Q(x))$' est '$P(x)$ <u>et</u> non $Q(x)$' selon la Règle 3.

■