

# COURS D'ANALYSE MATHEMATIQUE

## Chapitre 2

## Intégrale de Riemann en 1D

Cours

Version fin 2008
Année scolaire 2010 - 2011

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

FORMATION

**Auteurs de la Ressource Pédagogique**
**Charnay Michel**
**Dubois Gérard**

membre de UNIVERSITÉ DE LYON

INSA LYON

# Table des matières

# 1 Intégrale de Riemann : définition

L'intégrale de Riemann est définie pour une fonction bornée sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$. On appelle ***partition*** $P$ de l'intervalle $[a, b]$ tout ensemble fini de points

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_N$$

tels que $x_0 = a$ et $x_N = b$. Pour chacun des $N$ sous-intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ nous définissons

$$M_i = \sup\{f(x) \,/\, x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$
$$m_i = \inf\{f(x) \,/\, x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

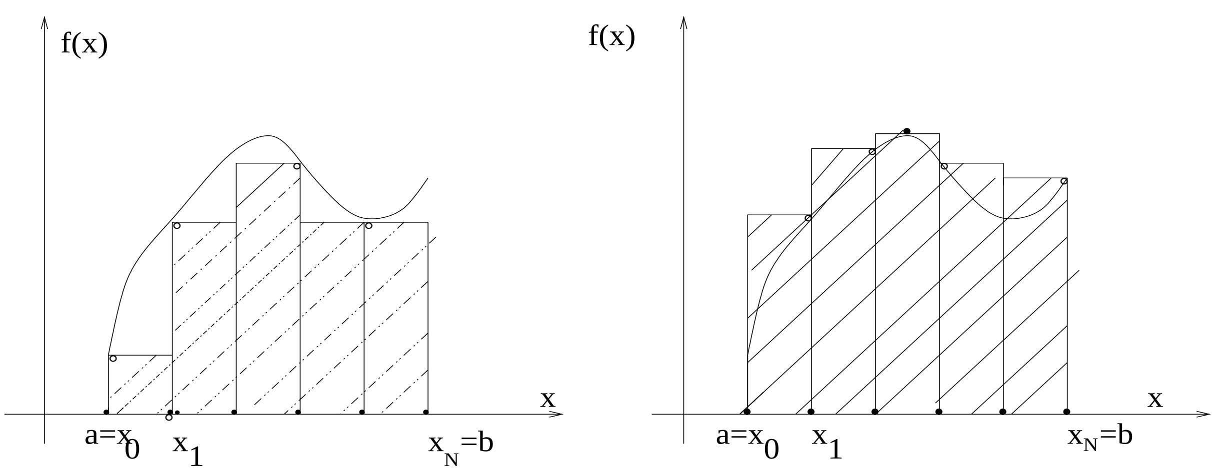
Les symboles $sup$ et $inf$ désignent les bornes supérieure et inférieure des parties de $\mathbb{R}$ définies dans les accolades (ces notions sont définies et caractérisées dans la $1^{\text{ère}}$ partie 'Etude des fonctions'). Pour cette partition $P$ on appelle ***somme de Riemann inférieure*** de $f$ et on note $L(P, f)$ la somme :

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{N} m_i \, (x_i - x_{i-1})$$

et ***somme de Riemann supérieure*** de $f$, notée $U(P, f)$, la somme :

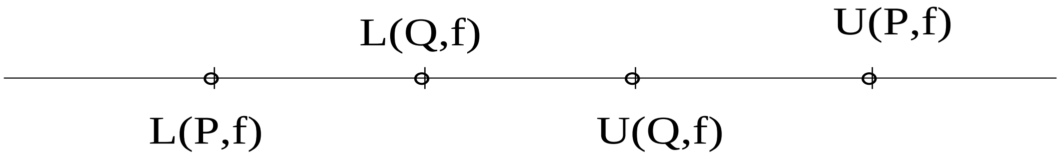
$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{N} M_i \, (x_i - x_{i-1})$$

On remarque qu'on a toujours l'inégalité $L(P, f) \leq U(P, f)$.
On peut illustrer ces sommes par les graphiques ci-dessous tracés dans le cas particulier d'une fonction positive. La somme $L(P, f)$ représente une somme d'aires de rectangles situés sous la courbe alors que $U(P, f)$ représente une somme d'aires de rectangles dont les sommets sont au-dessus du graphe de $f$.




Intuitivement on constate que $U(P, f)$ approche supérieurement l'aire de la partie située sous la courbe de $f$ et au dessus de l'axe des $x$ entre $a$ et $b$ alors que $L(P, f)$ l'approche inférieurement. De plus cette approximation sera d'autant plus précise que le nombre de points de la partition sera grand.

**Lemme 1.** *Soit $Q$ une partition de $[a,b]$ contenant les points de la partition $P$ plus d'autres supplémentaires. Alors $L(P,f) \leq L(Q,f)$ et $U(Q,f) \leq U(P,f)$ d'où l'illustration suivante sur l'axe réel :*




**Preuve.** A la partition $P$ on additionne les points supplémentaires un à un. Soit $Q_1$ la partition comprenant un nouveau point $y$ situé dans le j-ième intervalle :

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_{j-1} < y < x_j < \cdots < x_N$$

Alors

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{j-1} M_i\,(x_i - x_{i-1}) + M_j\,(x_j - x_{j-1}) + \sum_{i=j+1}^{N} M_i\,(x_i - x_{i-1})$$

$$U(Q_1,f) = \sum_{i=1}^{j-1} M_i\,(x_i - x_{i-1}) + (y - x_{j-1})\,\sup\{f(x)\,/\,x_{j-1} \leq x \leq y\}$$

$$+ (x_j - y)\sup\{f(x)\,/\,y \leq x \leq x_j\} + \sum_{i=j+1}^{N} M_i\,(x_i - x_{i-1}).$$

Puisque

$$\sup\{f(x)\,/\,x_{j-1} \leq x \leq y\}(y - x_{j-1}) + \sup\{f(x)\,/\,y \leq x \leq x_j\}(x_j - y) \leq$$
$$M_j\,(y - x_{j-1}) + M_j\,(x_j - y) = M_j\,(x_j - x_{j-1})$$

nous en concluons que $U(Q_1,f) \leq U(P,f)$. En ajoutant maintenant un deuxième point à $Q_1$ pour obtenir la partition $Q_2$ le même raisonnement conduit à l'inégalité $U(Q_2,f) \leq U(Q_1,f)$ et ainsi de suite jusqu'à épuisement des points additionnels. In fine on a $U(Q,f) \leq U(P,f)$. La preuve de l'inégalité $L(P,f) \leq L(Q,f)$ se fait de la même manière.

**Lemme 2.** *Soient $P$ et $Q$ deux partitions de $[a,b]$. On a alors l'inégalité*
$$L(P,f) \leq U(Q,f)$$

**Preuve.** Considérons la partition $P \cup Q$ construite avec l'ensemble des points de $P$ et ceux de $Q$ n'appartenant pas à $P$. Alors $L(P \cup Q,f) \leq U(P \cup Q,f)$. Puisque $P \cup Q$ contient les points de $P$ et ceux de $Q$, le lemme 1 implique
$$L(P,f) \leq L(P \cup Q,f) \leq U(P \cup Q,f) \leq U(Q,f).$$
Donc $L(P,f) \leq U(Q,f)$.

Notons maintenant $\mathcal{P}$ l'ensemble des partitions de l'intervalle $[a,b]$. Le Lemme 2 montre que l'ensemble $\Big\{L(P,f)\,;\,P\in\mathcal{P}\Big\}$ est majoré et que l'ensemble $\Big\{U(Q,f)\,;\,Q\in\mathcal{P}\Big\}$ est minoré. Les bornes supérieure pour le premier ensemble et inférieure pour le second existent donc et on a l'inégalité

$$I_i \stackrel{df}{=} \sup_{P\in\mathcal{P}}\Big\{L(P,f)\Big\} \;\leq\; \inf_{P\in\mathcal{P}}\Big\{U(P,f)\Big\} \stackrel{df}{=} I_s$$

les valeurs $I_i$ et $I_s$ représentant respectivement les ***intégrales inférieure*** et ***supérieure*** de $f$. En effet si $I_s < I_i$, posons $\varepsilon = I_i - I_s$. Compte tenu de la caractérisation des bornes supérieure et inférieure, il existerait $P$ et $Q\in\mathcal{P}$ tels que

$$L(P,f) > I_i - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{I_i+I_s}{2} \qquad \text{et } U(Q,f) < I_s + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{I_i+I_s}{2}$$

ce qui impliquerait $U(Q,f) < L(P,f)$ en contradiction avec le lemme 2. L'hypothèse de départ ne tient donc pas et on a bien $I_i \leq I_s$.

**Définition.** Une fonction bornée $f$ sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ est dite ***Riemann intégrable*** si les intégrales inférieure et supérieure sont égales

$$\sup_{P\in\mathcal{P}}\Big\{L(P,f)\Big\} = \inf_{P\in\mathcal{P}}\Big\{U(P,f)\Big\}.$$

Lorsque c'est le cas on définit l'intégrale de $f$ sur $[a,b]$ par cette valeur commune et on note :

$$\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{df}{=} \inf_{P\in\mathcal{P}}\Big\{U(P,f)\Big\}.$$

De plus lorsque la fonction $f$ est positive, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ représente par définition l' ***aire*** de la partie de $\mathbb{R}^2$ située sous la courbe de $f$ et au dessus de l'axe des $x$ entre $a$ et $b$.

On peut caractériser l'intégrabilité de $f$ sur $[a,b]$ en terme de partition comme suit.

**Théorème 1.1 (caractérisation de l'intégrabilité).** *Pour une fonction $f$ bornée sur $[a,b]$, $f$ est Riemann intégrable si et seulement si on a la propriété :*

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,P\in\mathcal{P} \text{ telle que } U(P,f)-L(P,f)\leq\varepsilon. \tag{1}$$

**Preuve.** Si $f$ est Riemann intégrable on peut trouver $Q$ et $\widetilde{Q}$ deux partitions telles que

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < L(Q,f) \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} > U(\widetilde{Q},f).$$

En considérant la partition $P = Q\cup\widetilde{Q}$ on obtient donc

$$U(P,f)-L(P,f) \leq U(\widetilde{Q},f) - L(Q,f) \leq \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x)\,dx = \varepsilon.$$

Réciproquement supposons vérifiée la propriété (1). On pose $\alpha = I_s - I_i$. On sait que $\alpha \geq 0$. Supposons que $\alpha > 0$. Pour toute partition $P$, $U(P,f) \geq I_s$ et $L(P,f) \leq I_i$ d'où $U(P,f) - L(P,f) \geq \alpha$. Ainsi la propriété (1) ne peut exister pour aucune partition si $\varepsilon < \alpha$. Comme la propriété (1) est vraie par hypothèse on en conclut que $\alpha = 0$ donc que $f$ est Riemann intégrable par définition.

**Exemples de fonctions intégrables au sens de Riemann.** L'ensemble des fonctions Riemann intégrables n'est pas vide fort heureusement ! Il comprend en particulier les fonctions constantes. En effet soit $f(x) = c$, $x \in [a,b]$. Pour cette fonction on a $U(P,f) = \sum_{i=1}^{N} c\,(x_i - x_{i-1}) = c(b-a)$ et $L(P,f) = \sum_{i=1}^{N} c\,(x_i - x_{i-1}) = c(b-a)$ et ceci pour toute partition $P$ de l'intervalle $[a,b]$. On en déduit l'égalité $I_s = I_i = c(b-a)$ d'où par définition $\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$.
On verra par la suite que l'ensemble des fonctions Riemann intégrables sur $[a,b]$ contient aussi les fonctions continues sur $[a,b]$ et qu'il est 'très près' de l'ensemble des fonctions continues. Prenons par exemple la fonction continue $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, considérons la partition équidistante $P_N$ de $[0,1]$ constituée des points $x_i = i\,h$, $i = 0, \cdots, N$ avec $h = \frac{1}{N}$. Pour cette partition les sommes de Riemann supérieure et inférieure s'écrivent

$$U(P_N,f) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2\,(x_i - x_{i-1}) = h^3 \sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{1}{N^3}\sum_{i=1}^{N} i^2$$
$$L(P_N,f) = \sum_{i=1}^{N} x_{i-1}^2\,(x_i - x_{i-1}) = h^3 \sum_{i=1}^{N} (i-1)^2 = \frac{1}{N^3}\sum_{i=1}^{N-1} i^2.$$

Sachant que $\sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$, on a les égalités $U(P_N,f) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3N} + \frac{1}{6N^2}$ et $L(P_N,f) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3N} + \frac{1}{6N^2}$ d'où $U(P_N,f) - L(P_N,f) = \frac{2}{3N}$. Il en résulte que la propriété (1) de caractérisation de l'intégrabilité de $f$ est satisfaite avec $N \geq \frac{2}{3\varepsilon}$ pour $\varepsilon > 0$ quelconque. Comme les suites $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3N} + \frac{1}{6N^2}\right)_{N\geq 1}$ et $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3N} + \frac{1}{6N^2}\right)_{N\geq 1}$ ont la même limite $\frac{1}{3}$, on en déduit les inégalités $\frac{1}{3} \leq I_i \leq I_s \leq \frac{1}{3}$ d'où $I_i = I_s = \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2\,dx$.

## 2 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Les propriétés qui suivent sont données pour la plupart sans démonstration ; elles concernent des fonctions Riemann intégrables sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$ (par exemple des fonctions continues sur $[a,b]$). De plus quand une intégrale est mentionnée c'est qu'elle existe.

• **Linéarité** : $$\int_a^b \Big(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\Big)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx; \qquad \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$$
l'intégrale d'une combinaison linéaire existe et a pour valeur la combinaison linéaire des intégrales.

• **Majoration** : $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$
la valeur absolue de l'intégrale d'une fonction est majorée par l'intégrale de la valeur absolue de cette fonction.

• **Monotonie** : $$\forall x \in [a,b], f(x) \leq g(x) \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$
si la fonction $g$ majore $f$ alors l'intégrale de $g$ majore celle de $f$.

• **Positivité** : $$\forall x \in [a,b], f(x) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$
l'intégrale d'une fonction positive ou nulle est positive ou nulle. De plus si $f$ est strictement positive l'intégrale l'est aussi.

• **Relation de Chasles** : $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx; \qquad c \in [a,b]$$
l'intégrale de $f$ sur $[a,b]$ est égale à la somme des intégrales de $f$ sur les sous-intervalles $[a,c]$ et $[c,b]$.

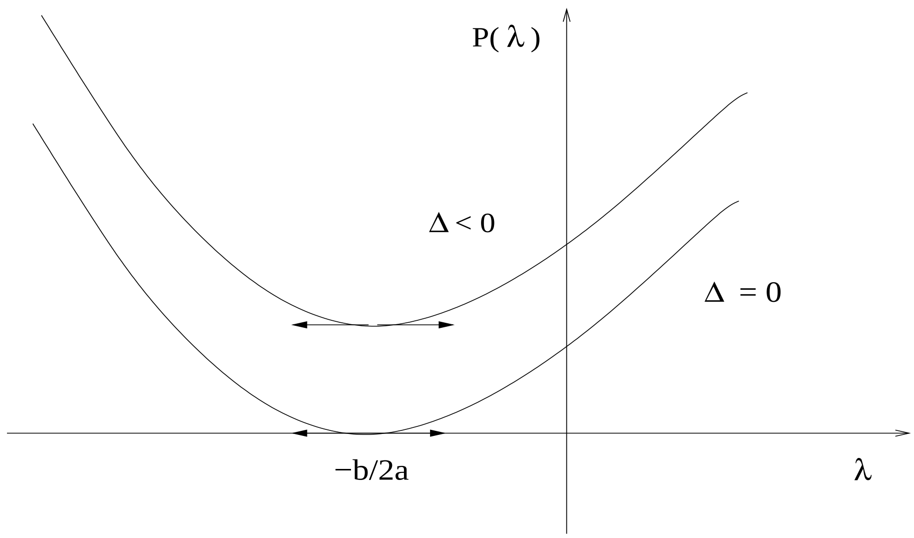
**Remarque :** Nous avons défini l'intégrale de Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$ pour $a < b$. Si $a > b$ on pose par définition
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$
Cette définition nous permet d'établir une relation de Chasles plus générale
$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx$$
pour n'importe quels points $x_1$, $x_2$, $x_3$ de l'intervalle $[a,b]$ sur lequel $f$ est Riemann intégrable.

• **Inégalité de Cauchy-Schwarz :**
$$\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right| \leq \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$
le produit de deux fonctions intégrables est intégrable et la valeur absolue de l'intégrale du produit est majorée par le produit des normes $L^2(a,b)$ des fonctions (on appelle norme $L^2(a,b)$ de $f$ et on note $\|f\|_2$, la valeur $\left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$ ). Cette inégalité est une conséquence des propriétés de linéarité et de monotonie :
$$\begin{aligned} 0 \leq \int_a^b \Big(\lambda\, f(t) + g(t)\Big)^2 dt &= \int_a^b \Big(\lambda^2 f^2(t) + 2\lambda\, f(t)\,g(t) + g^2(t)\Big)\,dt \\ &= \lambda^2 \int_a^b f^2(t)\,dt + 2\lambda \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt + \int_a^b g^2(t)\,dt\ ; \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Comme le trinôme du second degré en $\lambda$ est toujours positif, il a au plus une seule racine réelle et son discriminant est négatif ou nul c'est à dire

$$\Delta = 4\left(\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right)^2 - 4\int_a^b f^2(t)\,dt\,\int_a^b g^2(t)\,dt \leq 0$$

d'où l'inégalité cherchée.




$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c; \qquad a > 0,\ b,\ c \in \mathbb{R} \\
&= a\left(\lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(\lambda + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\
&= a\left(\left(\lambda + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \\
P('\lambda) &= 2\,a\lambda + b.
\end{aligned}$$

• **Inégalité de Minkowski** :

$$\left(\int_a^b \Big(f(t) + g(t)\Big)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

la norme $L^2(a,b)$ d'une somme de fonctions est majorée par la somme des normes. Cette inégalité est une conséquence de la monotonie et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_2^2 = \int_a^b \Big(f(t)+g(t)\Big)^2 dt &= \int_a^b \Big(f^2(t) + g^2(t) + 2\,f(t)\,g(t)\Big)\,dt \\
&\leq \int_a^b f^2(t)\,dt + \int_a^b g^2(t)\,dt + 2\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right| \\
&\leq \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\ \|f\|_2\ \|g\|_2 = \Big(\|f\|_2 + \|g\|_2\Big)^2.
\end{aligned}$$

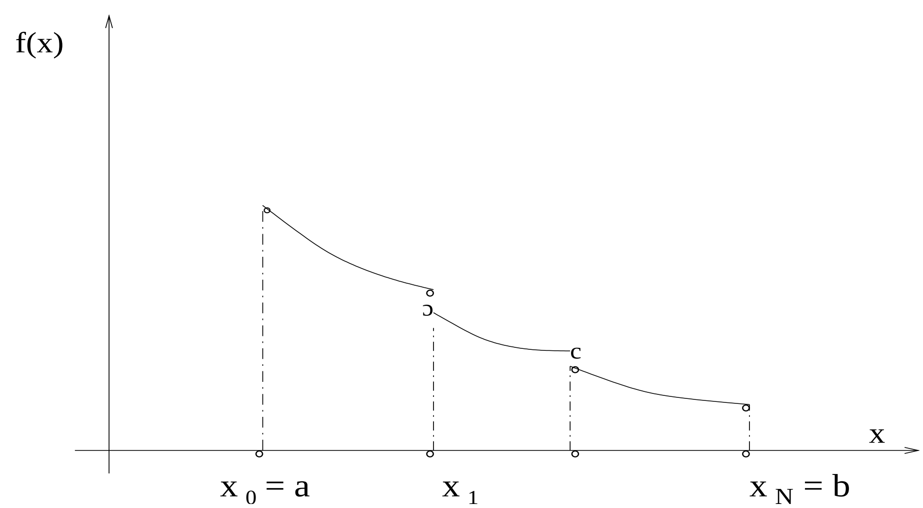
# 3 Intégrale d'une fonction monotone

Nous allons appliquer la caractérisation de l'intégrabilité qu'on vient d'établir à la classe des fonctions monotones pour obtenir les premiers exemples non triviaux de fonctions Riemann intégrables.

**Définition .** Une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[a,\, b]$ est dite monotone si elle est croissante ou décroissante sur cet intervalle. Elle est dite croissante sur $[a,\, b]$ si pour tout $x,\, y$ de $[a,\, b]$ la propriété $x \leq y$ entraîne $f(x) \leq f(y)$ ; elle est dite décroissante si $x \leq y$ entraîne $f(x) \geq f(y)$.

**Théorème 3.1.** *Soit $f$ une fonction définie sur $[a,\, b]$ un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$. On suppose $f$ bornée et monotone. Alors $f$ est Riemann intégrable.*

**Preuve.** Considérons le cas $f$ décroissante pour fixer les idées.




Soit $P$ une partition de $[a,\, b]$ faite avec les points $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_N = b$. A cause de la décroissance de $f$, les sommes de Riemann inférieure et supérieure s'écrivent :

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\,(x_i - x_{i-1})$$
$$U(P, f) = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)\,(x_{i+1} - x_i)$$

d'où l'expression de la différence

$$U(P, f) - L(P, f) =$$
$$f(x_0)\,(x_1 - x_0) - f(x_N)\,(x_N - x_{N-1}) + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\Big[(x_{i+1} - x_i) - (x_i - x_{i-1})\Big]$$

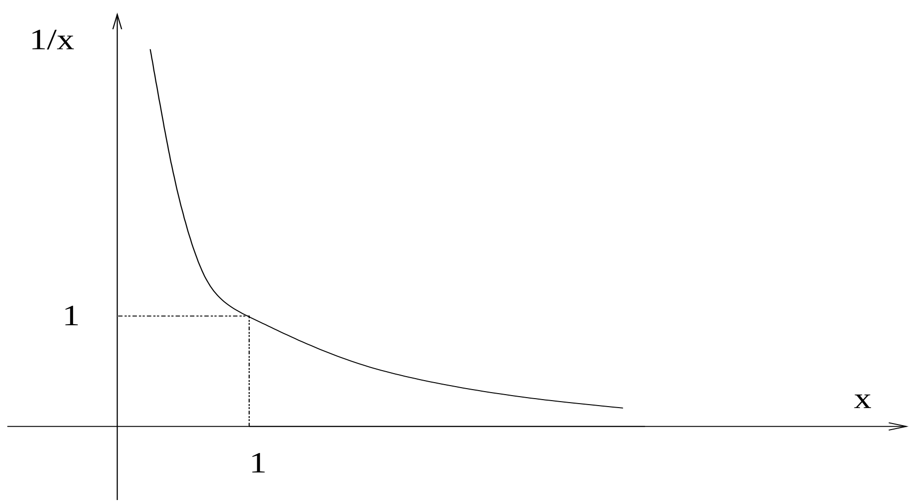
Soit $\varepsilon > 0$ quelconque ; choisissons une partition particulière $P$ telle que $x_i = a + i\,h$, $i = 1, \cdots, N$ avec $h = (b-a)/N$ et $N$ entier naturel positif tel que $N \geq (b-a)2M/\varepsilon$ et

$M = \sup_{x \in [a,\, b]} \left| f(x) \right|$. Les points $x_i$ étant régulièrement espacés, la partie entre crochets est nulle. D'où l'écriture simplifiée de la différence et sa majoration :

$$U(P, f) - L(P, f) = h\Big( f(x_0) - f(x_N) \Big) \leq 2hM = 2M\,(b - a)/N \leq \varepsilon$$

Le résultat suit grâce à la caractérisation de l'intégrabilité du Théorème 1.1.

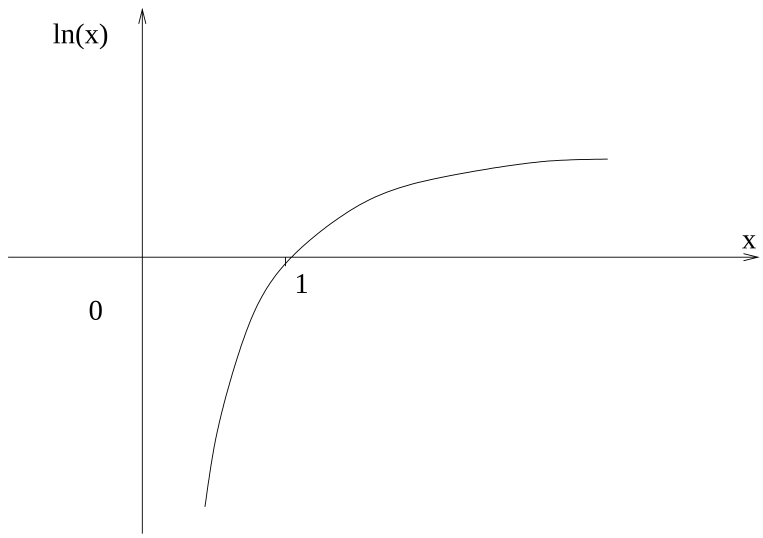
**Exemple.** Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $[a,\, b]$ avec $0 < a < b$. Cette fonction est bornée et décroissante sur $[a,\, b]$ et le résultat précédent nous permet d'affirmer, sans utiliser d'autre argument, que $\int_a^b \frac{1}{x} dx$ existe.




Si on pose $a = 1$ et $b \in \mathbb{R}^{*+}$, on définit la ***fonction logarithme*** par $\ln(b) \stackrel{df}{=} \int_1^b \frac{1}{x}\, dx$. Les propriétés de l'intégrale nous permettent d'affirmer que la fonction logarithme est positive pour $b > 1$ et négative pour $b < 1$. De plus on peut montrer à l'aide de la formule du changement de variable (Cf paragraphe 8) les égalités $\ln(x\,y) = \ln(x) + \ln(y)$ et $\ln(x^n) = n\, \ln(x)$ avec $n \in \mathbb{N}$. Il en découle les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \searrow 0} ln(x) = -\infty$$

et le graphe de la fonction logarithme.




*Graphe de la fonction logarithme*

# 4 Intégrale d'une fonction continue

Dans ce paragraphe $f$ est une fonction continue sur l'intervalle fermé borné $[a,\, b]$ et nous y démontrons son intégrabilité annoncée au paragraphe 1.

**Théorème 4.1.** *Une fonction continue sur un intervalle fermé et borné est Riemann intégrable.*

**Preuve.** Soit $f$ une telle fonction continue sur l'intervalle $[a,\, b]$. Nous allons utiliser le Théorème 1.1 qui caractérise l'intégrabilité en termes de partition pour montrer que $f$ est intégrable. Comme $f$ est continue sur $[a,\, b]$ intervalle fermé et borné, $f$ est uniformément continue sur cet intervalle. Donc pour $\varepsilon > 0$, on peut choisir $\delta > 0$ tel que

$$\big|x - y\big| \leq \delta \qquad \text{implique} \qquad \Big|f(x) - f(y)\Big| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Soit $P$ une partition quelconque de $[a,\, b]$ telle que la longueur de chacun de ses sous-intervalles soit inférieure ou égale à $\delta$ :

$$x_i - x_{i-1} \leq \delta, \qquad \forall i = 1, \cdots, N \qquad \text{avec } x_0 = a \text{ et } x_N = b.$$

Sur chacun des sous-intervalles $[x_{i-1},\, x_i]$ la fonction $f$ atteint ses bornes : $\exists\, c_i$ et $d_i \in [x_{i-1},\, x_i]$ tels que $f(c_i) = M_i$ borne supérieure de $f$ sur l'intervalle et $f(d_i) = m_i$ borne inférieure. Puisque $\big|c_i - d_i\big| \leq \delta$ pour tout $i$, nous en déduisons que $M_i - m_i \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} M_i\,(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{N} m_i\,(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{N} (M_i - m_i)\,(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon \end{aligned}$$

On a donc trouvé une partition $P$ pour laquelle la différence entre les sommes de Riemann supérieure et inférieure est inférieure ou égale à $\varepsilon$, nombre positif donné a priori. Ceci nous garantit que $f$ est Riemann intégrable.

Soit $P$ une partition de $[a, b]$ de points $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_N = b$ et $x_i^*$ un point du $i$-ème sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. La somme suivante

$$\sum_{i=1}^{N} f(x_i^*)\,(x_i - x_{i-1})$$

est appelée une ***somme de Riemann*** pour $f$ correspondant à la partition $P$. Cette somme dépend du choix des $x_i^*$ ; elle peut être égale à la somme de Riemann supérieure ou inférieure associée à $P$ puisque $f$, continue, atteint ses bornes sur $[x_{i-1}, x_i]$.
On appelle ***taille*** de la partition $P$ la valeur de $h = \max\{(x_i - x_{i-1});\, i = 1, \cdots, N\}$.
Ces définitions posées on peut énoncer le résultat qui suit.

**Corollaire 4.2.** *Corollaire Soit $\left(P_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de partitions de $[a, b]$ et appelons $h_k$ la taille de $P_k$. On suppose que $\lim_{k\to+\infty}\left(h_k\right) = 0$. Soit $S_k$ n'importe quelle somme de Riemann pour $f$ associée à la partition $P_k$. On a alors*

$$\lim_{k\to+\infty}\left(S_k\right) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

**Preuve.** Soit $\varepsilon > 0$ et un nombre $\delta > 0$ choisi comme dans le théorème précédent. On prend $K \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq K$ implique que $h_k$ la taille de $P_k$ soit inférieure ou égale à $\delta$. Pour tout indice $k$ on a les inégalités

$$\begin{aligned} L(P_k, f) &\leq S_k \leq U(P_k, f) \\ L(P_k, f) &\leq \int_a^b f(x)\,dx \leq U(P_k, f). \end{aligned}$$

Puisque $U(P_k, f) - L(P_k, f) \leq \varepsilon$ pour $k \geq K$, on en déduit pour de telles valeurs de $k$

$$-\varepsilon \leq L(P_k, f) - U(P_k, f) \leq S_k - \int_a^b f(x)\,dx \leq U(P_k, f) - L(P_k, f) \leq \varepsilon$$

c'est à dire
$$\left|S_k - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \varepsilon.$$

Ce qui prouve que la suite $\left(S_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $\int_a^b f(x)\,dx$ avec $k \to +\infty$.

Ainsi les sommes de Riemann de $f$ associées à des partitions de $[a, b]$ sont un bon moyen d'approcher l'intégrale de $f$ quand on ne connaît pas de primitive pour cette fonction (Cf paragraphe 6 intégrale d'une fonction dérivée) et qu'on ne peut donc calculer exactement $\int_a^b f(x)\,dx$. En pratique ces sommes de Riemann sont calculées par ordinateur et il est d'un grand intérêt de choisir les points $x_i^*$ de telle sorte que la convergence de la suite $S_k$ soit la plus rapide possible. Ces remarques sont un petit aperçu sur les méthodes numériques de calcul d'intégrales qui sont foisonnantes et souvent sophistiquées. Elles ne seront pas étudiées ici.

**Exemple.** Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$ définie et continue sur $[0,\, 1]$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on considère la partition $P_k$ de $[0,\, 1]$ constituée des points régulièrement espacés $x_i = 1/k$, $i = 0, \cdots, k$. On a alors pour tout $i$, $x_i - x_{i-1} = 1/k$ et la taille de la partition $P_k$ est-elle $h_k = 1/k$ notée $h$ pour simplifier. La somme de Riemann supérieure pour cette partition s'écrit

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \max\left\{f(x);\, x_{i-1} \le x \le x_i\right\} = \frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{1+1/k} + \cdots + \frac{1}{1+(k-1)/k}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{k+i} \end{aligned}$$

la somme de Riemann inférieure est

$$\begin{aligned} S_k^* &= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \min\left\{f(x);\, x_{i-1} \le x \le x_i\right\} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{1+i/k} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k+i}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{k\to+\infty}\big(h_k\big) = 0$ et par application du corollaire précédent avec chacune de ces sommes de Riemann, on a

$$\lim_{k\to+\infty}\big(S_k\big) = \lim_{k\to+\infty}\big(S_k^*\big) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx.$$

On verra au paragraphe 6 que, puisque $\frac{d}{dx}\ln(1+x) = f(x)$, cette intégrale vaut $[\ln(1+x)]_0^1$ $= \ln(2) = 0.693\cdots$. A défaut de ce résultat nous pouvons approcher numériquement l'intégrale d'aussi près qu'on veut. En effet

$$S_k - S_k^* = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{k+i} - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k+i} = \frac{1}{k} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{2k}$$

d'où, sachant que

$$S_k^* \le \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \le S_k,$$

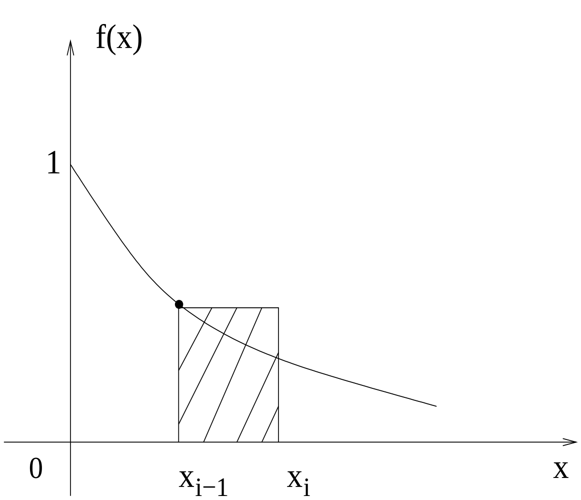
les inégalités

$$-\frac{1}{2k} = S_k^* - S_k \le S_k - \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \le S_k - S_k^* = \frac{1}{2k},$$

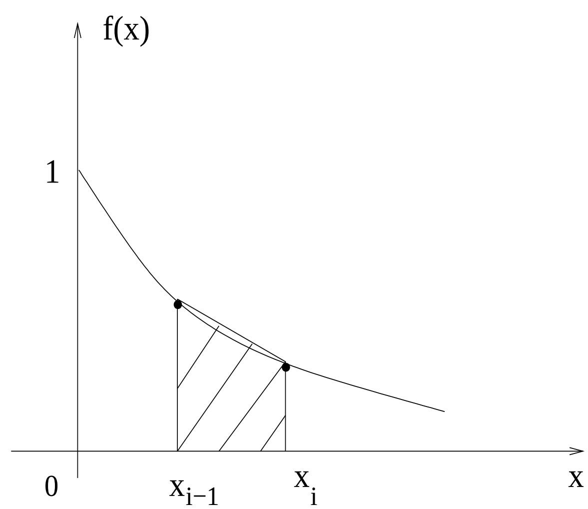
c'est à dire

$$\left|\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx - S_k\right| \le \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}h.$$

Ainsi pour $k = 5$ obtient-on une approximation de $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$ à $\frac{1}{10}$ près avec $S_5 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = \frac{1879}{2520} = 0.745635$.
L'inégalité précédente permet de dire que l'approximatioin de l'intégrale de $f$ par des sommes de Riemann (ici supérieures) est du premier ordre car l'erreur faite est majorée, en valeur absolue, par $\frac{1}{2}h$. Cette approximation n'est pas excellente cependant il en existe d'autres d'ordre plus élevé. Par exemple si, au lieu d'approcher l'intégrale de $f$ sur chaque sous-intervalle par l'aire d'un rectangle, on l'approche par l'aire d'un trapèze de base $f(x_{i-1})$ et$f(x_i)$, alors l'approximation de $\int_0^1 f(x)\,dx$ obtenue, notée $T_k$, est d'ordre 2. En effet on peut montrer que l'erreur faite est majorée par $C\,h^2$ avec $C$ une constante ne dépendant que de $f$ et de la longueur de l'intervalle d'intégration.




$S_k = h \sum_{i=0}^{k-1} f(ih)$




$T_k = h \left( \frac{f(0)}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} f(ih) + \frac{f(1)}{2} \right)$

# 5 Intégrale d'une fonction discontinue

Dans cette partie $f$ est une fonction définie et bornée sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$ et on ne suppose plus qu'elle est continue sur cet intervalle. Bien sûr $f$ n'est pas forcément intégrable comme le montre l'exemple qui suit.

**Exemple de non intégrabilité.** Soit la fonction $f$ définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est rationnel } (x \in \mathbb{Q}) \\ 1 & \text{si } x \text{ est irrationnel } (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$$

Soit $P$ une partition quelconque de $[0, 1]$ de sous-intervalles $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \cdots, N$. Sur chacun de ces sous-intervalles, quelle que soit sa longueur, il y a à la fois un nombre rationnel et irrationnel. En effet pour tout réel $x$ il existe un rationnel et un irrationnel aussi près qu'on veut de $x$ et différents de lui. En conséquence on a $\inf\{f(x);\, x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0$ et $\sup\{f(x);\, x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 1$. D'où $L(P, f)$ la somme de Riemann inférieure vaut 0 et $U(P, f)$ la somme de Riemann supérieure vaut 1. On en déduit que le supremum des sommes de Riemann inférieures est nul alors que l'infimum des sommes de Riemann supérieures est égal à 1. Les intégrales de Riemann inférieure et supérieure n'étant pas égales, l'intégrale de $f$ n'existe pas.

Le résultat qui suit caractérise l'intégrabilité d'une fonction $f$ en terme de continuité (ou de discontinuité). C'est un théorème dont la démonstration est difficile et qu'on admettra.

**Théorème 5.1** (**caractérisation de l'intégrabilité**). *Soit $f$ une fonction définie et bornée sur l'intervalle fermé borné $[a,\, b]$. Soit $D_f$ l'ensemble de discontinuité de $f$. Alors $f$ est intégrable sur $[a,\, b]$ si et seulement si l'ensemble $D_f$ est Lebesgue-négligeable.*

**Définition.** ***l'ensemble*** $D_f$ ***de discontinuité*** de $f$ avec

$$D_f = \{x \in [a,\, b] \,/\, f \text{ n'est pas continue en } x\}$$

est dit ***Lebesgue-négligeable***, et on note $\mathcal{L}$-négligeable, si quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe une suite d'intervalles ouverts $\left(I_k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que la réunion des $I_k$ contienne $D_f$ et la somme (infinie) des longueurs des intervalles soit inférieure à $\varepsilon$

$$\bigcup_{k\geq 1} I_k \subset D_f$$
$$\sum_{k\geq 1} l\left(I_k\right) \leq \varepsilon$$

Pour la fonction $f$ de l'exemple précédent on a $D_f = [0,\, 1]$ et cet ensemble n'est pas $\mathcal{L}$-négligeable ; la fonction $f$ n'est donc pas intégrable. Par contre pour toute fonction $f$ continue sauf sur un ensemble fini de points ($f$ est dite ***continue par morceaux***), on a $D_f = \{a_0,\, a_1, \cdots,\, a_k\}$, $k \in \mathbb{N}$ et cet ensemble est $\mathcal{L}$-négligeable comme on peut s'en convaincre facilement ; il en découle l'intégrabilité de $f$ par le Théorème 5.1. De même toute fonction $f$ continue sauf sur un ensemble dénombrable de points $\{a_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ de l'intervalle $[a,\, b]$ est intégrable. On montre en effet que $D_f = \{a_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ est aussi $\mathcal{L}$-négligeable.

On montre plus difficilement qu'il existe des sous-ensembles de $[a,\, b]$ dont le nombre d'éléments est 'le même' que celui de $\mathbb{R}$ et qui sont $\mathcal{L}$-négligeables (Cf infra ensemble triadique de Cantor) mais ces sous-ensembles restent des cas d'école.
Le Théorème 5.1 de caractérisation montre donc à quel point les fonctions Riemann-intégrables sur un intervalle sont proches des fonctions continues sur cet intervalle.

On peut maintenant se poser la question de savoir dans quelles conditions deux fonctions bornées ont même intégrale sur $[a,\, b]$. Le résultat suivant, donné sans démonstration, répond à la question.

**Théorème 5.2.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies, bornées et intégrables sur $[a,\, b]$. Si $f$ et $g$ sont égales sauf sur un ensemble $\mathcal{L}$-négligeable alors les intégrales sont égales.*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

**Pratiquement** : Si $f$ et $g$, deux fonctions bornées, ont un ensemble de discontinuité fini ou dénombrable et sont égales sauf sur un ensemble fini ou dénombrable de points, alors elles sont intégrables et leurs intégrales sont égales.

Le résultat précédent nous permet de définir l'intégrale de $f$ fonction définie et bornée sur $(a,\, b)$ un intervalle borné, ouvert ou semi-ouvert . En effet si on prolonge $f$ bornément sur

$[a,\, b]$ et si on appelle $f^*$ ce prolongement alors $f$ et $f^*$ ne diffèrent éventuellement qu'aux points $a$ et $b$. Lorsque $f^*$ est intégrable ($D_{f^*}$ $\mathcal{L}$-négligeable) on pose par définition

$$\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{df}{=} \int_a^b f^*(x)\,dx$$

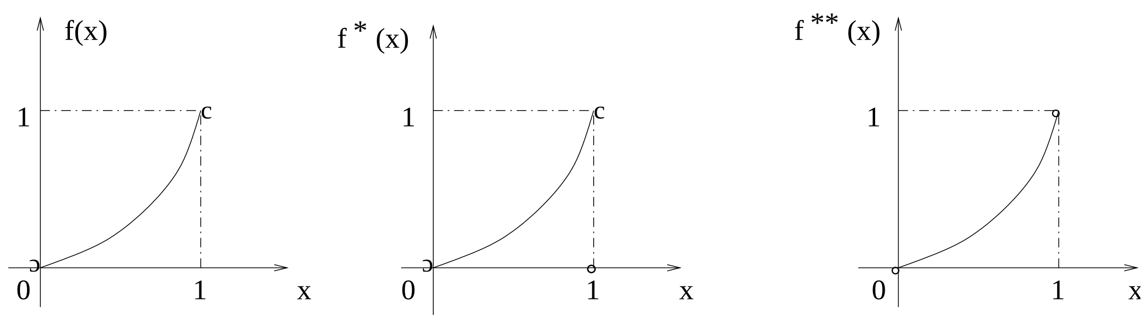
et ceci est indépendant du prolongement $f^*$ choisi pour $f$.
**Pratiquement** : si $f$ a un ensemble de discontinuité fini ou dénombrable il en sera de même pour $f^*$ et cette fonction ci sera intégrable. On dit alors, par définition, que l'intégrale de $f$ sur $(a,\, b)$ est celle de $f^*$ sur $[a,\, b]$. de plus si $f^{**}$ est un autre prolongement de $f$, alors il diffère de $f^*$ éventuellement en $a$ et $b$. L'ensemble de discontinuité de $f^{**}$ est fini ou dénombrable comme celui de $f^*$ et on a par application du Théorème 5.2 :

$$\int_a^b f^*(x)\,dx = \int_a^b f^{**}(x)\,dx \left(\stackrel{df}{=} \int_a^b f(x)\,dx\right).$$

**Exemple 1.** Soit la fonction $f(x) = x^2$ pour $x \in ]0,\, 1[$. On appelle d'une part $f^*$ le prolongement de $f$ sur $[0,\, 1]$ tel que $f^*(0) = 1$ et $f^*(1) = 0$. D'autre part $f^{**}$ représente le prolongement de $f$ sur $[0,\, 1]$ par continuité : $f^{**}(0) = 0$ et $f^{**}(1) = 1$. On a alors

$$\int_0^1 f(x)\,dx \stackrel{df}{=} \int_0^1 f^*(x)\,dx = \int_0^1 f^{**}(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

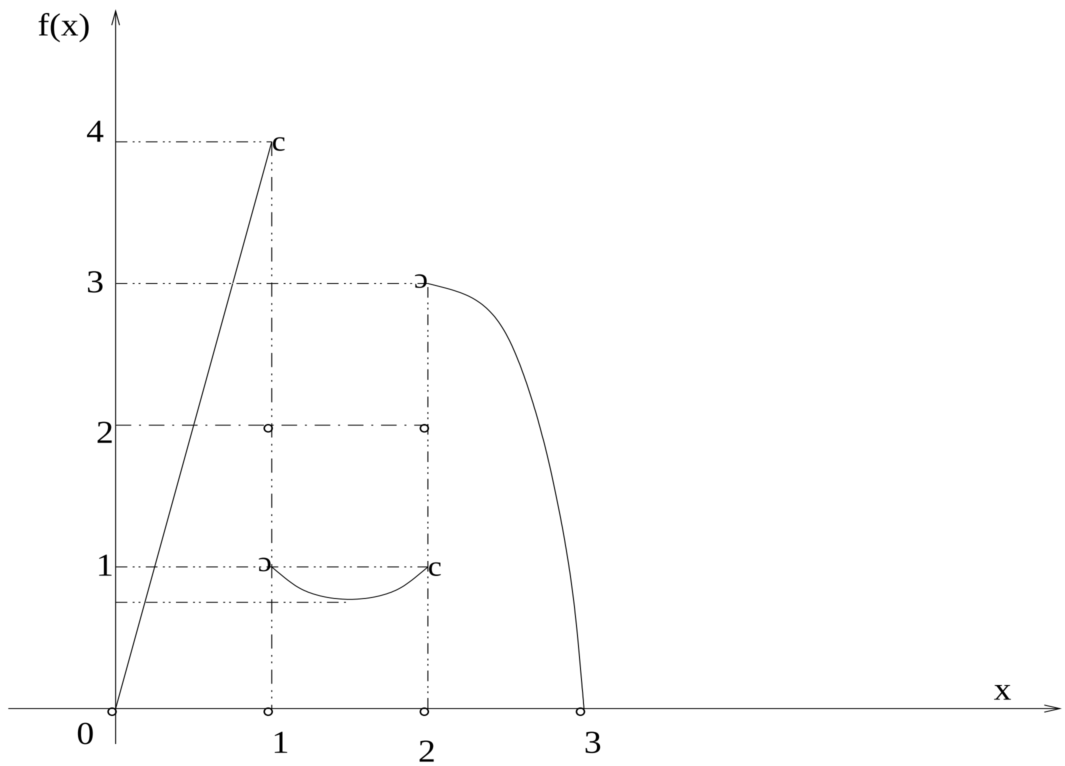
en tenant compte du calcul de l'intégrale sur $[0,\, 1]$ de la fonction $x^2$ fait au paragraphe 1.




■

**Exemple 2.** Soit la fonction $f$ dite 'Gasper le fantôme' définie par

$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \text{ et } x = 2 \\ 1 + (x-1)(x-2) & \text{si } 1 < x < 2 \\ -3(x-1)(x-3) & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$




Cette fonction est bornée et continue par morceaux, elle est donc intégrable. Par application de la relation de Chasles et du Théorème 5.2 et en admettant provisoirement que $\int_a^b x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^b$ et $\int_a^b x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b$ , on a

$$\begin{aligned}
\int_0^3 f(x)\,dx &= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx \\
&= \int_0^1 4x\,dx + \int_1^2 \big(1+(x-1)(x-2)\big)\,dx + \int_2^3 \big(-3(x-1)(x-3)\big)\,dx \\
&= 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[3x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_1^2 - 3\left[3x - 2x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_2^3 \\
&= 2 + \frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{13}{6}.
\end{aligned}$$

L'intégrale de 'Gasper' est donc indépendante de la position des yeux mais dépend du sourire ainsi que de la forme de l'ectoplasme.

■

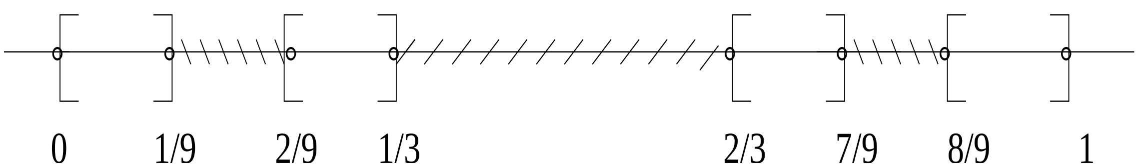
Nous revenons maintenant sur les sommes de Riemann pour généraliser le résultat du Corollaire 4.2 à une fonction $f$ bornée sur $[a,\, b]$ et continue par morceaux. Soient $a_0,\, a_1, \cdots,\, a_k,\, k \in \mathbb{N}$, les points de discontinuité de $f$. Sur chaque sous-intervalle $[a,\, a_0]$, $[a_{i-1},\, a_i]$, $i = 1, \cdots, k$ et $[a_k,\, b]$ on prolonge $f$ par continuité et on applique le Corollaire 4.2. Comme le nombre de sous-intervalles est fini on établit sans trop de difficultés le résultat suivant : soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de partitions de $[a,\, b]$ et $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des tailles des partitions telle que $\lim_{k\to+\infty}(h_k) = 0$. Alors quelle que soit $S_k$, somme de Riemann pour $f$ associée à la partition $P_k$, on a

$$\lim_{k\to+\infty}\Big(S_k\Big)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

***L'ensemble triadique de CANTOR*** se définit comme l'intersection dénombrable d'ensembles fermés emboités $I_n\,(I_0\supset I_1\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots)$ il est noté

$$K=\bigcap_{n\geq 0} I_n.$$

Chaque $I_n$ est une réunion finie d'intervalles fermés disjoints et on obtient $I_{n+1}$ à partir de $I_n$ en enlevant le tiers médian ouvert de chaque intervalle constituant $I_n$ . Sachant que $I_0=[0,\,1]$, $K$ est parfaitement défini. C'est ainsi que chaque $I_n$ est constitué de $2^n$ intervalles fermés disjoints dont la somme des longueurs vaut $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Voici par exemple la définition de $I_2$ et sa représentation




$$I_0=[0,\,1],\qquad I_1=\left[0,\,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\,1\right]\qquad I_2=\left[0,\,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\,\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},\,1\right]$$

Quelles sont donc les propriétés de $K$ ? On montrer que l'ensemble triadique de Cantor est fermé et $\mathcal{L}$-négligeable. De plus, et bien que $\mathcal{L}$-négligeable, $K$ n'est pas dénombrable mais a la puissance du continu (il a le 'même nombre' d'éléments que $\mathbb{R}$) ; on dit qu'il est équipotent à $\mathbb{R}$. Enfin on peut montrer que $K$ est constitué de l'ensemble des points $x$ de $\mathbb{R}$ admettant une décomposition en base 3 de la forme

$$x=\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{3^n}\qquad;\qquad a_n=0 \text{ ou } 2.$$

Par exemple pour $\frac{1}{3}$ et $1\in K$ on a $\quad\frac{1}{3}=\frac{0}{3}+\sum_{n\geq 2}\frac{2}{3^n}=\frac{2}{3^2}\left(\frac{1}{1-1/3}\right)\quad$ et $\quad 1=\sum_{n\geq 1}\frac{2}{3^n}=\frac{2}{3}\frac{1}{(1-1/3)}$.

# 6 Intégrale d'une fonction dérivée

On considère maintenant une fonction $f$ définie, continue et dérivable sur $[a,\,b]$, sa dérivée étant aussi continue sur l'intervalle ; on dit alors que $f$ est ***de classe*** $\mathcal{C}^1$ sur $[a,\,b]$ et on note $f\in\mathcal{C}^1\big([a,\,b],\mathbb{R}\big)$. On s'intéresse à l'intégrale de $f'$ en relation avec $f$. Le théorème qui suit, appelé premier théorème fondamental, précise le lien entre l'intégrale de $f'$ et $f$.

**Théorème 6.1 (Théorème fondamental 1).** *Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1\big([a,\, b], \mathbb{R}\big)$. Alors l'intégrale de $f'$ sur $[a,\, b]$ existe et on a*

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \big[f(x)\big]_a^b \overset{df}{=} f(b) - f(a).$$

**Preuve.** La fonction $f'$ étant continue sur $[a,\, b]$(intervalle fermé et borné) est bornée. Cette fonction est donc intégrable et nous allons maintenant évaluer $\int_a^b f'(x)\,dx$.
Soit $P$ une partition de $[a,\, b]$ comprenant $N$ sous-intervalles. Le ***théorème de la valeur moyenne*** (Cf Chapitre 1) montre qu'il existe $\xi_i$ dans chaque sous-intervalle $[x_{i-1},\, x_i]$ de la partition tel que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Ainsi

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{N} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) = \sum_{i=1}^{N} f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{1}$$

La somme (1) est une somme de Riemann pour $f'$ et le Corollaire 4.2 entraîne que cette somme converge vers $\int_a^b f'(x)\,dx$ lorsque la taille de la partition $P$ tend vers 0. Comme chaque somme de Riemann (1) est égale à $f(b) - f(a)$, il en va de même pour la limite de ces sommes.

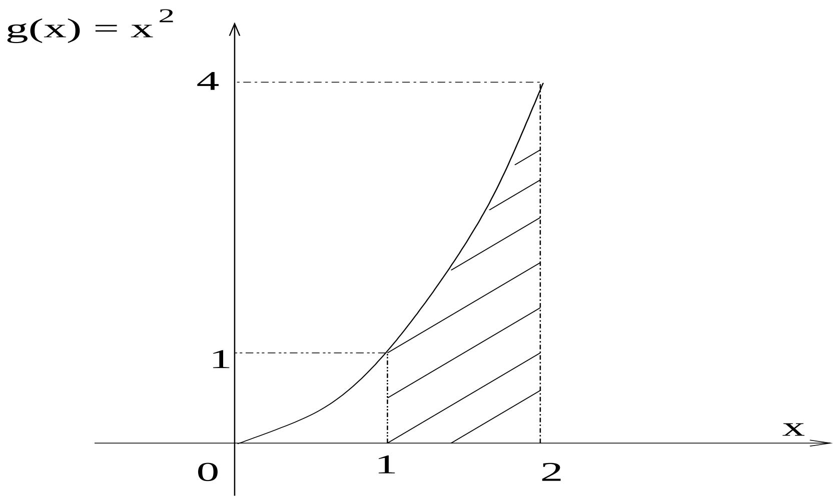
Ce premier théorème fondamental est basique pour le calcul d'intégrales. Etant donné l'intégrale d'une fonction continue $\int_a^b g(x)\,dx$ à évaluer, on essaie de trouver une fonction $G$, dite ***primitive*** de $g$, telle que $G'(x) = g(x)$ pour $x \in [a,\, b]$. Alors par le Théorème fondamental 1 on a

$$\int_a^b g(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

**Exemple 1.** Prenons $g(x) = x^p$, avec $p$ entier naturel, alors $G(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$ et on retrouve le résultat qu'on a anticipé au paragraphe précédent

$$\int_a^b x^p\,dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_a^b = \frac{1}{p+1}\big(b^{p+1} - a^{p+1}\big).$$

Ce qu'on illustre pour $p = 2$ avec la figure suivante.




*aire de la partie hachurée :* $\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$.

■

Tout naturellement on vient à se poser la question : pour chaque fonction $f$ continue, existe-t-il une fonction (primitive) $F$ telle que $F' = f$ ? Il y est répondu dans le second théorème fondamental.

**Théorème 6.2 (Théorème fondamental 2).** *Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle fermé et borné $[a,\, b]$. Pour $x \in [a,\, b]$ nous définissons*

$$F(x) \overset{df}{=} \int_a^x f(t)\,dt.$$

*Alors $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,\, b]$ et $F'(x) = f(x)$.*

**Preuve.** Pour $x \in [a,\, b]$ soit $\Delta x \neq 0$ tel que $x + \Delta x \in [a,\, b]$ ; on a alors les égalités et inégalité suivantes :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} - f(x)\right| &= \left|\frac{1}{\Delta x}\left(\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) - f(x)\right| \\
&= \left|\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - f(x)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} \big(f(t) - f(x)\big)\,dt\right| \\
&\leq \frac{1}{|\Delta x|}\int_x^{x+\Delta x} |f(t) - f(x)|\,dt
\end{aligned}$$

cette dernière inégalité étant vraie si $\Delta x > 0$, ce qu'on supposera (sinon il faut prendre la dernière intégrale sur l'intervalle $[x + \Delta x,\, x]$).
Ecrivons la continuité de $f$ en $x$ :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall y \in [x - \delta,\, x + \delta] \cap [a,\, b] \Longrightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

De ce qui précède on tire les conclusions suivantes : pour $|\Delta x| \leq \delta(\varepsilon)$, on a $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [x, x + \delta x]$ d'où

$$\left|\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} - f(x)\right| \leq \frac{1}{|\Delta x|}\int_x^{x+\Delta x} \varepsilon\,dt = \varepsilon\,\frac{|\Delta x|}{|\Delta x|} = \varepsilon.$$

Ainsi

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x).$$

**Remarque :** La démonstration précédente reste valable si on considère $F(x)$ avec $x \leq a$, $f$ étant continue sur un intervalle fermé borné contenant $x$ et $a$. Ainsi pour $f$ continue sur $[a,\, b]$, si on pose

$$F(x) \overset{df}{=} \int_c^x f(t)\, dt, \qquad x \in [a,\, b]$$

avec $c$ un point quelconque de $[a,\, b]$, on a encore le résultat $F'(x) = f(x)$ quel que soit $x \in [a,\, b]$. On rappelle qu'on a défini au paragraphe 3 la fonction logarithme par $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$ pour $x > 0$ d'où l'expression de sa dérivée par le Théorème fondamental 2 : $\ln'(x) = 1/x$.

Avec ce second théorème fondamental il existe donc au moins une primitive de $f$. On montre dans le résultat suivant que toutes les primitives de $f$ diffèrent d'une constante.

**Théorème 6.3.** *Soient $F$ et $G$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1([a,\, b], \mathbb{R})$ telles que pour tout $x$ de $[a,\, b]$ on a $F'(x) = G'(x)$. Alors les deux fonctions sont égales à une constante près*

$$\forall x \in [a,\, b], \qquad F(x) = G(x) + c \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

**Preuve.** On pose $h = F - G$ ; par hypothèse on a $h'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$ pour tout $x$ de $[a,\, b]$. Soit $x$ un point quelconque de $[a,\, b]$. Le ***Théorème de la valeur moyenne*** appliqué à $h$ sur l'intervalle $[x,\, b]$ permet d'écrire

$$h(b) - h(x) = (b - x)\, h'(\theta) = 0 \qquad \text{avec } \theta \in ]x,\, b[.$$

D'où l'égalité $h(x) = h(b)$ pour tout $x$ de l'intervalle fermé $[a,\, b]$. On en déduit l'égalité demandée avec $c = h(b)$ : $F - G = c$.

**Attention** : si on ne travaille pas sur un intervalle $[a, b]$, ce théorème ne tient plus. Pour le voir, prenons par exemple $F(x) \overset{\text{df}}{=} 1$ pour $x \in [-1, 0[$, $F(x) \overset{\text{df}}{=} -1$ pour $x \in ]0, 1]$ et $G(x) \overset{\text{df}}{=} -F(x)$, $x \in [-1, 0[ \cup ]0, 1] \overset{\text{df}}{=} \Omega$. Les fonctions $F$ et $G$ sont bien de classe $C^1$ sur $\Omega$ avec $F'(x) = G'(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$ ; mais $F(x) - G(x) = 2$ pour $x \in [-1, 0[$ et $F(x) - G(x) = -2$ pour $x \in ]0, 1]$. La différence $F - G$ n'est pas constante sur l'ensemble $\Omega$ où les dérivées sont égales.

**Exemple 2.** Soit pour $x > 0$ la fonction $F(x) = \int_1^x \frac{1-\ln(t)}{t^2}\,dt$. Par le second théorème fondamental $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ (tout $x > 0$ est inclus dans un intervalle $[a,\, b]$, $0 < a < 1 < b$, sur lequel la fonction $(1-\ln(t))/t^2$ est continue) et on a

$$F'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

Par ailleurs soit $G(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^{*+}$. On a en dérivant le quotient $\ln(x)/x$, $G'(x) = (1-\ln(x))/x^2$. Pour tout intervalle $[a,\, b]$, $0 < a < 1 < b$, on peut donc appliquer le Théorème 6.3 à savoir

$$F(x) = \int_1^x \frac{1-\ln(t)}{t^2}\,dt = \frac{\ln(x)}{x} = G(x), \qquad \forall x \in [a,\, b]$$

la constante $c$ étant nulle car $F(1) = G(1) = 0$. Comme $a$ est positif arbitrairement petit et $b$ arbitrairement grand on en déduit

$$\int_1^x \frac{1-\ln(t)}{t^2}\,dt = \frac{\ln(x)}{x}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{*+}.$$

■

**Le lemme de Riemann.** Nous avons maintenant tous les outils pour démontrer un résultat, dû à Riemann, qui permet de montrer que les coefficients de Fourier $a_k$ et $b_k$ d'une fonction $T$-périodique et intégrable Riemann tendent vers 0 quand $k \to +\infty$ ($a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi k x}{T}\,dx$, $b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi k x}{T}\,dx$, $k \in \mathbb{N}^\star$ Cf Chapitre 3 §2).

**Lemme** (**de Riemann**) Soit $f$ une fonction intégrable Riemann sur l'intervalle $[a, b]$. Alors les intégrales $A(\lambda) = \int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx$ et $B(\lambda) = \int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,dx$, $\lambda \in \mathbb{R}^\star$ tendent vers 0 quand $|\lambda|$ tend vers l'infini.

**Preuve.** $f$ étant intégrable Riemann, il existe une partition $P$ de $[a, b]$, $x_1 = a < x_2 < \cdots < x_N = b$, telle que pour $\varepsilon > 0$ quelconque

$$U(P, f) - L(P, f) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

avec

$$L(P, f) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq U(P, f)\,.$$

Soit $m_i = \inf\{f(x); x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$, $i = 1, \cdots, N$. Posons $\psi(x)$ la fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ telle que $\psi(x) = m_i$ pour $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Cette fonction $\psi(x)$ est intégrable Riemann et on a $\int_a^b \psi(x)\,dx = L(P, f)$ $(= L(P, \psi) = U(P, \psi))$. D'où les égalités et inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\left|A(\lambda) - \int_a^b \psi(x)\cos(\lambda x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b (f(x)-\psi(x))\cos(\lambda x)\,dx\right| \\
\leq \int_a^b |(f(x)-\psi(x))\cos(\lambda x)|\;dx &\leq \int_a^b |f(x)-\psi(x)|\;dx = \int_a^b (f(x)-\psi(x))\,dx \\
= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \psi(x)\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx - L(P, f) \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.
\end{aligned}$$

Par ailleurs $\int_a^b \psi(x)\cos(\lambda x)\,dx = \sum_{i=1}^N m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos(\lambda x)\,dx$ avec $\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos(\lambda x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda x)\right]_{x_{i-1}}^{x_i}\right| \leq \frac{2}{|\lambda|}$ (cf Théorème fondamental 1). D'où $\left|\int_a^b \psi(x)\cos(\lambda x)\,dx\right| \leq \frac{2}{|\lambda|}\sum_{i=1}^N |m_i|$ ce qui prouve que $\lim_{|\lambda|\to+\infty} \int_a^b \psi(x)\cos(\lambda x)\,dx = 0$ , de sorte qu'il existe $L$ tel que $|\lambda| \geq L$ entraîne $\left|\int_a^b \psi(x)\cos(\lambda x)\,dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. En résumé, comme $|A(\lambda)| - \left|\int_a^b \psi(x)\cos(\lambda x)\,dx\right| \leq \left|A(\lambda) - \int_a^b \psi(x)\cos(\lambda x)\,dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $|\lambda| \geq L \Longrightarrow |A(\lambda)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ce qui termine tout.
Idem pour $B(\lambda)$.

# 7 Intégration par parties

Soient $u$ et $v$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,\, b]$ à valeurs réelles. Comme le produit $u\,v$ est une primitive de $u\,v' + u'\,v$ sur $[a,\, b]$ on a d'après le premier théorème fondamental

$$u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) = \int_a^b \big(u(x)\,v'(x) + u'(x)\,v(x)\big)\,dx$$

D'où la ***formule d'intégration par parties*** :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = \big[u(x)\,v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

qui est souvent utilisée pour le calcul d'intégrales. On peut généraliser cette formule à des fonctions continues et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a,\, b]$ : si $u$ et $v$ sont définies et continues sur $[a,\, b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha_i,\, \alpha_{i+1}]$, $i = 0, \cdots, k$, $(\alpha_0 = a < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{k+1} = b)$ alors, bien que $u'$ et $v'$ ne soient pas forcément définies en $\alpha_i$, $i = 0, \cdots, k$, on pose

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx \stackrel{df}{=} \sum_{i=0}^k \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} u(x)\,v'(x)\,dx = \sum_{i=0}^k \left\{ \big[u(x)\,v(x)\big]_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} - \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} u'(x)\,v(x)\,dx \right\}$$

par application de la formule sur chaque sous-intervalle

$$= \big[u(x)\,v(x)\big]_{\alpha_0}^{\alpha_{k+1}} - \sum_{i=0}^k \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} u'(x)\,v(x)\,dx$$

par continuité de $u\,v$

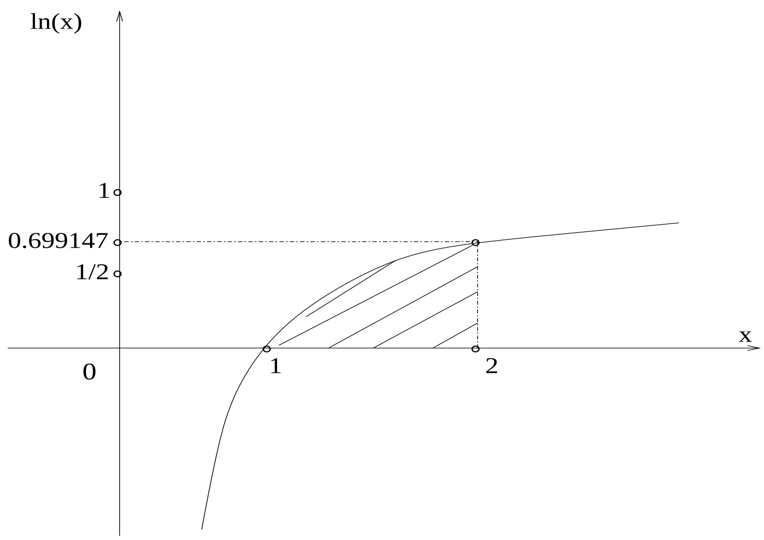
$$= \big[u(x)\,v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

par définition.

**Exemple 1.** Soit l'intégrale $\int_1^2 \ln(x)\,dx$ à calculer exactement. Nous allons le faire avec la formule d'intégration par parties en posant $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = 1$. On a alors $v(x) = x$ et $u'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. D'où

$$\begin{aligned}\int_1^2 u(x)\,v'(x)\,dx &= \int_1^2 \ln(x)\,dx = \big[u(x)\,v(x)\big]_1^2 - \int_1^2 u'(x)\,v(x)\,dx \\ &= \big[x\,\ln(x)\big]_1^2 - \int_1^2 1\,dx = 2\ln(2) - 1.\end{aligned}$$

On en déduit au passage une minoration de $\ln(2)$ : comme $\int_1^2 \ln(x)\,dx > 0$ (puisque $\ln(x) > 0$ pour $x \in ]1,\, 2]$) on a donc $2\ln(2) - 1 > 0$ c'est à dire $\ln(2) > \frac{1}{2}$.

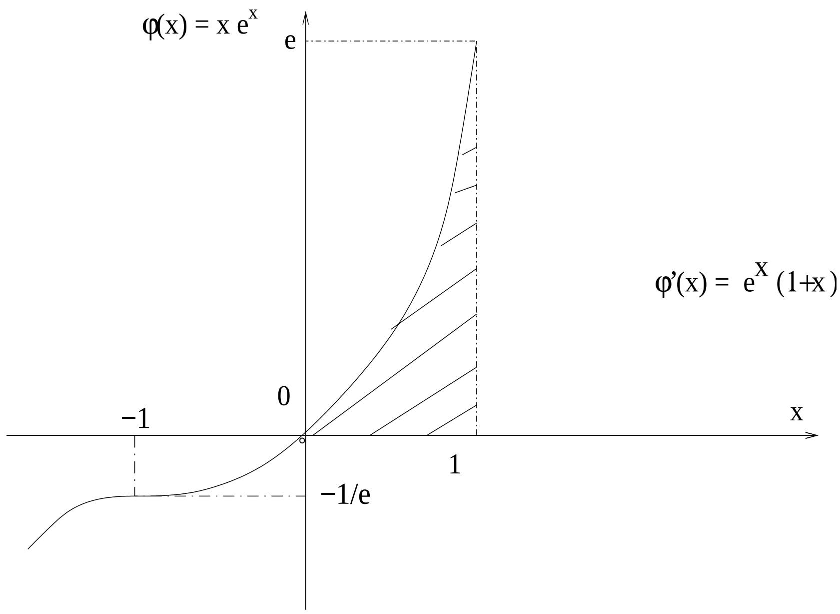



*aire de la partie hachurée :* $\int_1^2 \ln(x)\,dx = 2\ln(2) - 1 = 0.386294\cdots$ .

■

**Exemple 2.** Soit à calculer l'intégrale $\int_0^1 x\,e^x\,dx$. Sachant que la fonction exponentielle (notée $e^x$, $x \in \mathbb{R}$) est égale à sa dérivée nous posons $v(x) = e^x = v'(x)$ et $u(x) = x$ et nous appliquons la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned}\int_0^1 u(x)\,v'(x)\,dx &= \int_0^1 x\,e^x\,dx = \big[x\,e^x\big]_0^1 - \int_0^1 1\,e^x\,dx \\ &= e - \big[e^x\big]_0^1 = e - (e-1) = 1\end{aligned}$$




*aire de la partie hachurée :* $\int_0^1 x\, e^x\, dx = 1.$

■

Nous avons vu (cf Chapitre 1 §6) une première formule de Taylor. Il en existe une autre dans laquelle le dernier terme, appelé reste, n'a pas la même allure que les précédents mais est exprimé sous forme intégrale.
Nous donnons ce théorème avec sa démonstration qui utilise la formule d'intégration par parties. Les hypothèses sont un peu plus fortes que celle du théorème première version.

**Théorème 7.1** (**Théorème de Taylor 2**). *Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b]$ et à dérivée continue sur $[a, b]$ jusqu'à l'ordre $n+1$ ($n \in \mathbb{N}$). Soit $x_0 \in [a, b]$. Alors, quel que soit $x$ appartenant à l'intervalle $[a, b]$, nous avons l'égalité*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}$$

*avec*

$$R_{n+1} = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

**Définition.** La formule précédente est appelée formule de Taylor avec reste intégral.

**Démonstration** Elle se fait par récurrence sur l'entier $n$. Pour $n = 0$ cette formule de Taylor s'écrit $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt$ qui traduit qu'une fonction est l'intégrale de sa dérivée. (cf §6 Théorème fondamental 1). Dans l'intégrale précédente intégrons par parties en posant $u(t) = f'(t)$ et $v'(t) = 1$ alors, $u'(t) = f''(t)$ et choisissons $v$ sous la forme $v(t) = -(x - t)$ ; il vient alors

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt &= [-f'(t)(x-t)]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} -(x-t) f^{(2)}(t)\, dt \\ &= f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t) f^{(2)}(t)\, dt \end{aligned}$$

d'où la formule de Taylor souhaitée à l'ordre $n = 1$ ce qui amorce la démonstration par récurrence.
Pour $n \geq 1$ nous expliquons maintenant le passage de l'ordre $n$ à l'ordre $n+1$ pour la formule. On suppose donc qu'on ait l'égalité

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + R_n\,.$$

On intégre $R_n = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(t)\,dt$ par parties en posant $u(t) = f^{(n)}(t)$ et $v'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ d'où

$$R_n = \left[-f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

et le résultat désiré car $\left[-f^n(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\right]_{x_0}^{x} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\,.$

# 8 Formule du changement de variable

Soit $\varphi$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle fermé borné $[a,\,b]$ à valeurs réelles. On rappelle que l'image $I = \varphi([a,\,b])$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ (cf Chapitre 1 §6). Soit $f$ une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $U$ partie de $\mathbb{R}$ contenant l'intervalle $I$

$$[a,\,b] \xrightarrow{\varphi} I \subset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Posons $F(u) = \int_{\varphi(a)}^{u} f(x)\,dx$, $u \in I$ et définissons $G(t) = F\big(\varphi(t)\big)$ pour $t$ appartenant à l'intervalle $[a,\,b]$. D'après le second théorème fondamental et le théorème de dérivation d'une fonction composée (cf Chapitre 1 §5) on a $G'(t) = F'\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)$ pour tout $t$ de $[a,\,b]$. Le premier théorème fondamental du calcul intégral donne alors

$$G(b) - G(a) = \int_a^b G'(t)\,dt = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt$$

c'est à dire

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt$$

ce qui constitue la ***formule du changement de variable***. On convient d'appeler la fonction $\varphi$ ***changement de variable***.

**Exemple 1.** Pour $a > 0$ considerons l'intégrale $\int_a^{a^2} \frac{1}{x}\,dx$ que nous cherchons à exprimer en fonction de $\ln(a)$. Pour ce faire nous posons $\varphi(t) = at$, $t \in [1,\,a]$. Il est clair que $\varphi([1,\,a]) = [a,\,a^2] = I$ et la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est définie et continue sur $U = \mathbb{R}^*$ qui contient $I$. Par la formule du changement de variable, qu'il est licite d'appliquer, on a donc

$$\int_{a=\varphi(1)}^{a^2=\varphi(a)} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^a \frac{1}{\varphi(t)}\varphi'(t)\,dt = \int_1^a \frac{a}{at}\,dt = \int_1^a \frac{dt}{t} \stackrel{df}{=} \ln(a).$$

On en déduit, grâce à la relation de Chasles, l'égalité $\ln(a^2) = 2\ln(a)$. En effet

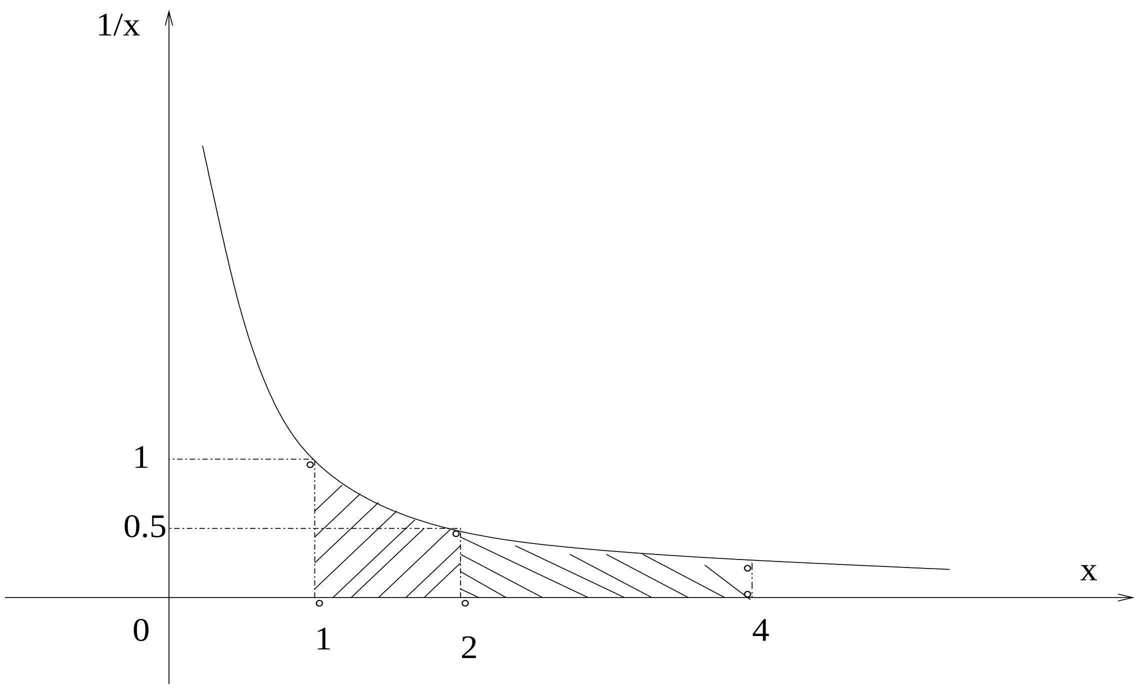
$$\ln(a^2) = \int_1^{a^2} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^a \frac{1}{x}\,dx + \int_a^{a^2} \frac{1}{x}\,dx = 2\int_1^a \frac{1}{x}\,dx = 2\ln(a).$$

De même on démontrerait pour $n \in \mathbb{N}^*$ et avec le même changement de variable $\varphi$

$$\int_{a^{n-1}}^{a^n} \frac{1}{x}\,dx = \int_{a^{n-2}}^{a^{n-1}} \frac{1}{x}\,dx = \cdots = \int_1^a \frac{1}{x}\,dx$$

d'où par la relation de Chasles

$$\ln(a^n) = \int_1^{a^n} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^a \frac{1}{x}\,dx + \int_a^{a^2} \frac{1}{x}\,dx + \cdots + \int_{a^{n-1}}^{a^n} \frac{1}{x}\,dx = n\int_1^a \frac{1}{x}\,dx = n\ln(a).$$




*Chacune des aires hachurées vaut* $\ln(2)$.

■

**Exemple 2.** Nous continuons à explorer les propriétés de la fonction logarithme dans cet exemple. Pour $a, b \in \mathbb{R}^{*+}$, soit l'intégrale $\int_a^{ab} \frac{1}{x}\,dx$ qu'on cherche à exprimer en fonction de

$\ln(b)$. En utilisant le changement de variable $\varphi(t) = at$, $t \in [1,\, b]$ la formule du changement de variable donne

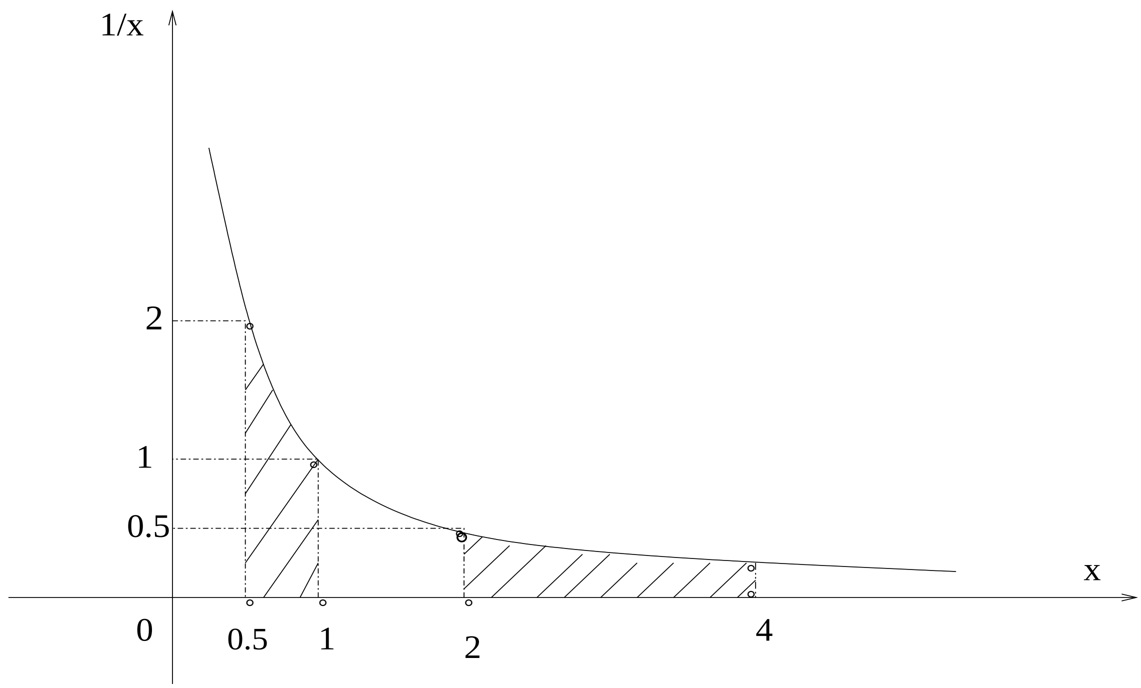
$$\int_{a=\varphi(1)}^{ab=\varphi(b)} \frac{1}{x}\, dx = \int_1^b \frac{1}{\varphi(t)} \varphi'(t)\, dt = \int_1^b \frac{1}{t}\, dt = \ln(b).$$

D'où, toujours en utilisant la relation de Chasles :

$$\ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{x}\, dx = \int_1^{a} \frac{1}{x}\, dx + \int_a^{ab} \frac{1}{x}\, dx = \ln(a) + \ln(b).$$

$$a = 0.5\,;\; b = 4\,; ab = 2$$

$$\ln(2) = \ln(0.5) + \ln(4) \iff \int_2^4 \frac{1}{x}\, dx = \ln(4) - \ln(2) = -\ln(0.5) = \int_{0.5}^1 \frac{1}{x}\, dx$$



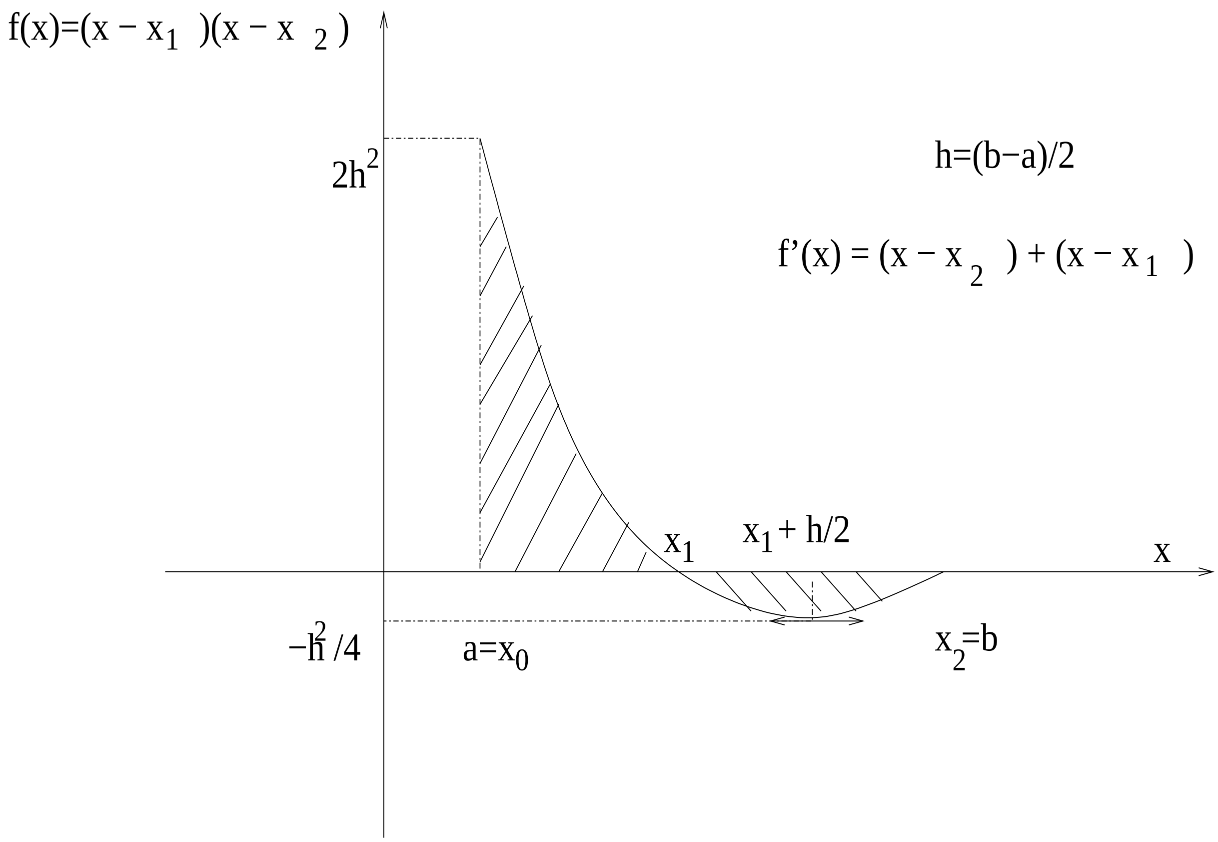

*Les aires hachurées sont égales.*

■

**Exemple 3.** Soit l'intervalle fermé borné $[a,\, b]$ sur lequel on prend trois points équidistants $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h = b$ avec $h = \frac{b-a}{2}$. Il s'agit d'évaluer $\int_a^b (x - x_1)(x - x_2)\, dx$ en fonction du pas $h$. Pour ce faire on utilise le changement de variable $\varphi(t) = t + x_1$ ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_a^b (x - x_1)(x - x_2)\, dx &= \int_{x_0=\varphi(-h)}^{x_2=\varphi(+h)} (x - x_1)(x - x_2)\, dx \\
&= \int_{-h}^{+h} (\varphi(t) - x_1)(\varphi(t) - x_2)\, \varphi'(t)\, dt \\
&= \int_{-h}^{+h} t(t - h)\, dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{h}{2}t^2\right]_{-h}^{+h} = \frac{2}{3}h^3.
\end{aligned}$$

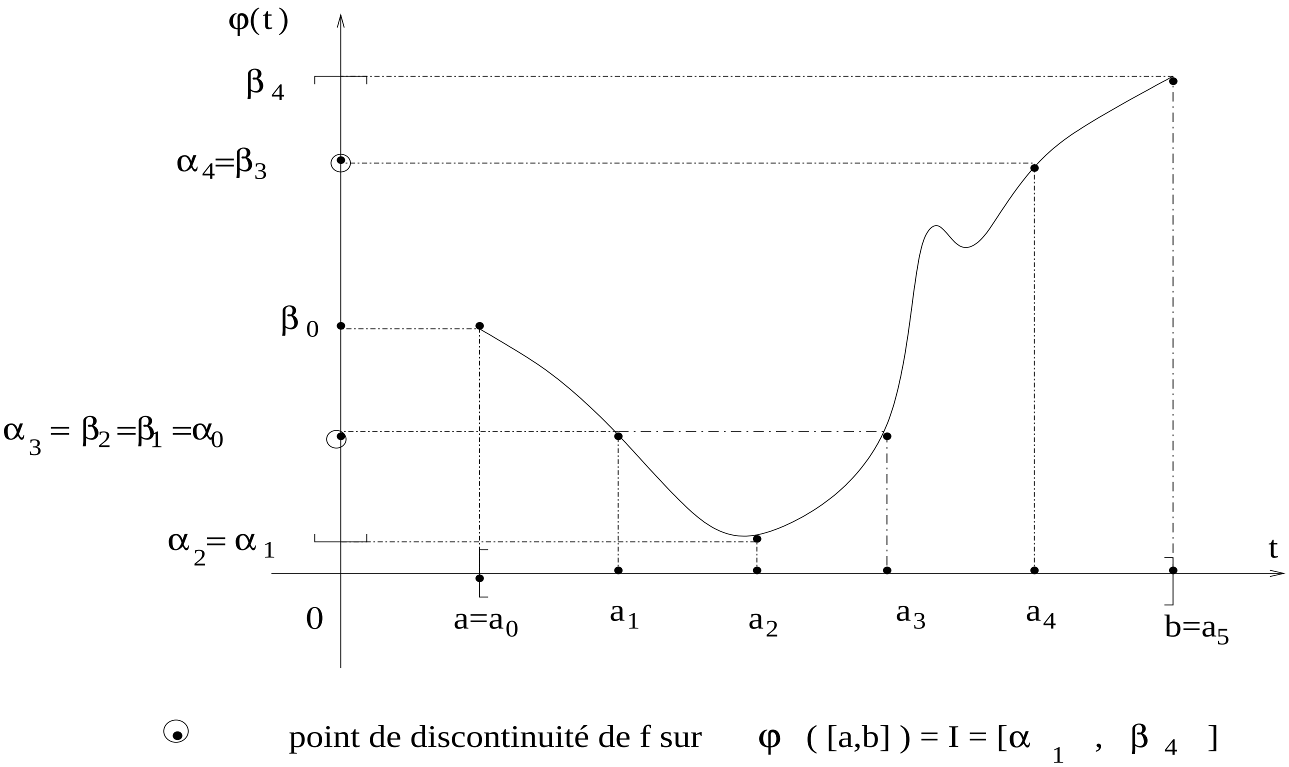
Il y a grand intérêt à procéder comme cela et ne pas développer la fonction $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ en puissance de $x$ pour intégrer terme à terme. En effet le résultat de cette intégration terme à terme ne dépend pas explicitement de $h$ et il faut faire quelque effort pour le rendre explicite.




*L'aire de la partie hachurée au dessus de l'axe des $x$*
*moins l'aire de la partie hachurée située en dessous égale $\frac{2}{3}h^3$.*

■

On peut généraliser la formule du changement de variable à une fonction $f$ définie sur $U$, bornée et continue par morceaux sur l'intervalle $I = \varphi([a,\, b])$. Soit $[a_i,\, a_{i+1}], i = 0, \cdots, k$ des sous-intervalles de $[a,\, b]$ tels que $\varphi([a_i,\, a_{i+1}]) = [\alpha_i, \beta_i]$ avec $a_0 = a$ et $a_{k+1} = b$, les intervalles $[\alpha_i, \beta_i]$ étant des sous-intervalles de continuité de $f$ sur $I$ (après prolongement éventuel de $f$ par continuité au bord de $[\alpha_i, \beta_i]$).




*Exemples de sous-intervalles* $[a_i,\, a_{i+1}]$ *et* $[\alpha_i, \beta_i]$.

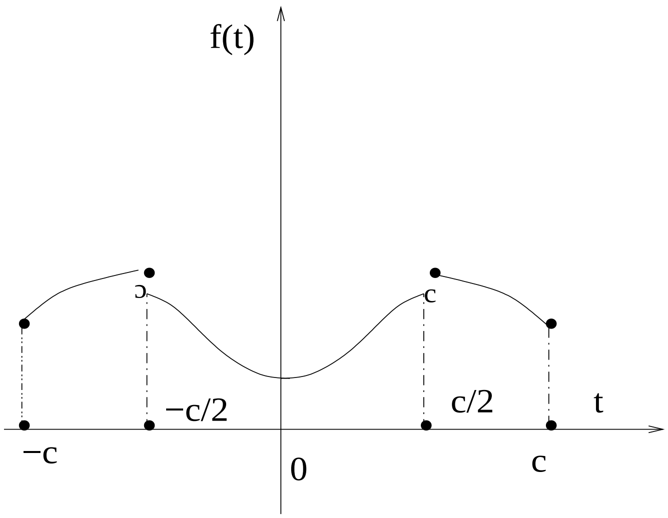
En travaillant comme précédemment, mais sur $[a_i,\, a_{i+1}]$ à la place de $[a,\, b]$ on obtient

$$\int_{\varphi(a_i)}^{\varphi(a_{i+1})} f(x)\, dx = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \qquad \forall i \in \{0, \cdots, k\}.$$

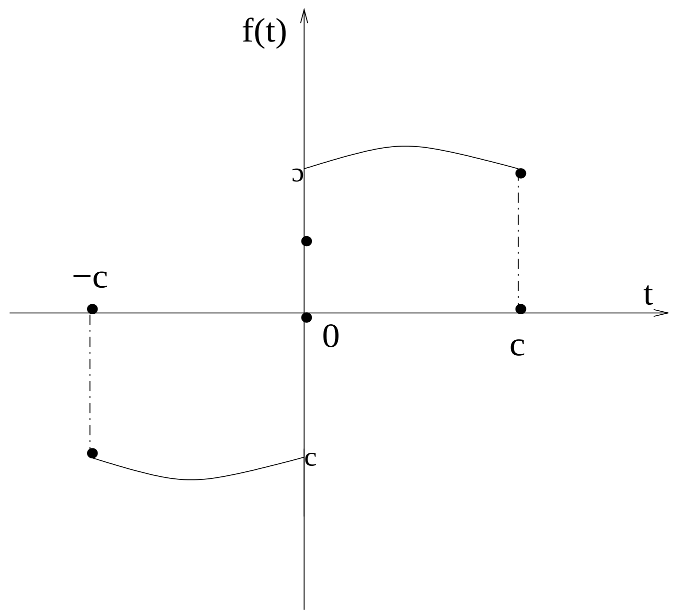
D'où en sommant sur $i$ et en tenant compte de la relation de Chasles

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{k} \int_{\varphi(a_i)}^{\varphi(a_{i+1})} f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{k} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt.$$

**Exemple 4.** Soit $f$ une fonction définie sur l'intervalle $[-c,\, +c]$, $c > 0$, à valeurs réelles, bornée et continue par morceaux sur $[-c,\, +c]$. On dit que $f$ est ***paire*** si $f(-t) = f(t)$ pour tout $t$ de $[0,\, +c]$ et qu'elle est ***impaire*** si $f(-t) = -f(t)$ quel que soit $t$ appartenant à l'intervalle semi-ouvert $]0,\, +c]$.




*f est paire* $\int_{-c}^{+c} f(t)\,dt = 2\int_0^{+c} f(t)\,dt$




*f est impaire* $\int_{-c}^{+c} f(t)\,dt = 0.$

Lorsque $f$ est paire on applique la formule du changement de variable avec $\varphi(t) = -t$ pour montrer l'égalité $\int_{-c}^{0} f(t)\,dt = \int_0^c f(t)\,dt$. En effet

$$\begin{aligned}
\int_{-c}^{0} f(t)\,dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(0)} f(t)\,dt &= \int_c^0 f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_c^0 f(-t)\,(-1)dt \\
&= -\int_c^0 f(t)\,dt = \int_0^c f(t)\,dt
\end{aligned}$$

en tenant compte de la parité. D'où l'égalité $\int_{-c}^{+c} f(t)\,dt = 2\int_0^{+c} f(t)\,dt$.
Lorsque $f$ est impaire, toujours avec $\varphi(t) = -t$, on montre que $\int_{-c}^{0} f(t)\,dt = -\int_0^c f(t)\,dt$. En effet

$$\begin{aligned}
\int_{-c}^{0} f(t)\,dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(0)} f(t)\,dt &= \int_c^0 f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_c^0 f(-t)\,(-1)dt \\
&= +\int_c^0 f(t)\,dt = -\int_0^c f(t)\,dt
\end{aligned}$$

en tenant compte de l'imparité. On en déduit que $\int_{-c}^{+c} f(t)\,dt = 0$.
Pour l'exemple de la fonction paire dont le graphe est donné précédemment on a $\varphi([0,\, c]) = [-c, 0]$ . Si on note $a = 0$ et $b = c$ alors $\varphi([a,\, b]) = I = [-c, 0]$ et les sous-intervalles de continuité de $f$ sur $I$, après prolongement éventuel, sont $\varphi\left(\left[0,\, \frac{c}{2}\right]\right) = \varphi([a_0,\, a_1]) = \left[-\frac{c}{2},\, 0\right] = [\alpha_0, \beta_0]$ et $\varphi\left(\left[\frac{c}{2},\, c\right]\right) = \varphi([a_1,\, a_2]) = \left[-c,\, -\frac{c}{2}\right] = [\alpha_1, \beta_1]$.

■

# 9 Intégrale de Riemann impropre (ou généralisée)

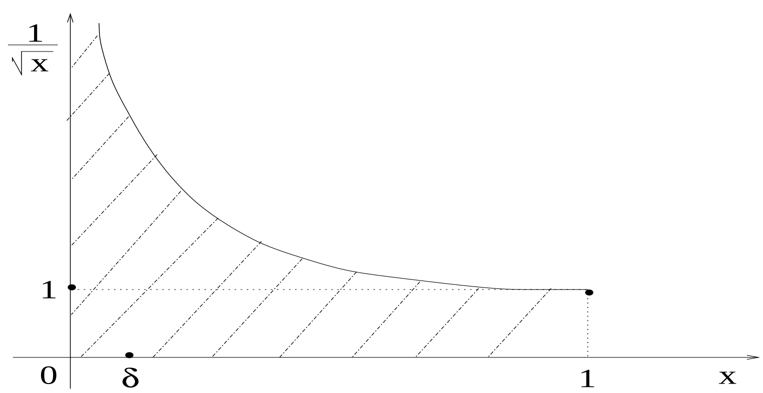
Jusqu'à maintenant nous avons envisagé l'intégrale de Riemann pour des fonctions bornées sur un intervalle fermé borné, puis borné. Nous allons étendre, dans cette partie, l'intégrale de Riemann à des fonctions non bornées sur un intervalle borné et à des fonctions bornées sur des intervalles non bornés. Commençons par l'exemple suivant.

**Exemple 1.** Soit la fonction $f(x) = 1/\sqrt{x}$ pour $x \in ]0,1]$. Cette fonction est continue sur $]0,1]$ mais n'est pas bornée car $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0. L'intégrale de Riemann de $f$ ne peut donc être envisagée sur $[0,1]$ ou $]0,1]$ comme cela a été fait précédemment. Cependant on peut remarquer que l'intégrale de Riemann de $f$ existe sur tout l'intervalle $[\delta,1]$ car $f$ est continue sur cet intervalle donc bornée. Cette intégrale se calcule explicitement (cf Théorème fondamental 1) :

$$\int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_\delta^1 = 2 - 2\sqrt{\delta}.$$

Comme la limite de la partie droite de l'égalité existe lorsque $\delta$ tend vers 0, on définit l'intégrale de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0,1]$ comme étant cette limite :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\delta \searrow 0} \int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2.$$




*L'aire de la partie hachurée vaut 2.*

■

De façon générale on définit l'intégrale d'une fonction non bornée sur un intervalle borné de la même façon que dans l'Exemple 1.

**Définition.** Soit $f$ une fonction continue (pour simplifier) sur l'intervalle semi-fermé $]a,b]$, $a < b$, et non bornée. Si la limite de $\int_{a+\delta}^b f(x)\,dx$ existe, et est finie, lorsque $\delta$ tend vers 0 par valeurs décroissantes, on pose par définition

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{df}{=} \lim_{\delta \searrow 0} \int_{a+\delta}^b f(x)\,dx$$

et cette limite est appelée ***intégrale de Riemann impropre*** (ou ***généralisée***) de $f$ sur $]a,b]$ ; on dit alors que l'intégrale de Riemann impropre est convergente. Lorsque cette limite n'existe pas on dit que l'intégrale de Riemann impropre est divergente.

**Remarques :** cette définition peut s'étendre à toute fonction réelle définie sur $]a, b]$, bornée et intégrable Riemann sur tout intervalle $[c, b]$ avec $a < c < b$. De la même manière on définit l'intégrale de Riemann impropre de $f$ fonction continue sur $[a, b[$ non bornée au voisinage de $b$. Pour une fonction $f$ non bornée aux extrémités d'un intervalle $]a, b[$ mais continue sur cet intervalle ouvert on dit que l'intégrale de Riemann impropre de $f$ existe si, pour $c \in ]a, b[$, les intégrales : $\int_a^c f(x)\,dx$ et $\int_c^b f(x)\,dx$ sont convergentes. On pose alors par définition $\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{df}{=} \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ ceci étant indépendant du nombre $c$ choisi.

Le résultat qui suit donne des exemples d'intégrales impropres convergentes (incluant la fonction de l'Exemple 1) et divergentes.

**Théorème 9.1.** *Soit la fonction $f(x) = x^\alpha$, $x \in ]0, 1[$ avec $\alpha$ valeur réelle.*
*1°) pour $0 \leq \alpha$, $\int_0^1 x^\alpha\,dx = \frac{1}{1+\alpha}$ (intégrale de Riemann ordinaire)*
*2°) pour $-1 < \alpha < 0$, $\int_0^1 x^\alpha\,dx = \frac{1}{1+\alpha}$ (intégrale de Riemann impropre convergente)*
*3°) pour $\alpha \leq -1$, l'intégrale de Riemann impropre de $f$ est divergente.*

**Preuve.** Pour $0 \leq \alpha$, $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ est une fonction continue et bornée sur $]0, 1]$ et $\int_0^1 x^\alpha\,dx = \left[\frac{1}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{1+\alpha}$.
Pour $\alpha \in ]-1, 0[$, $f$ n'est plus bornée au voisinage de 0, mais on a

$$\begin{aligned}
\int_\delta^1 x^\alpha\,dx = \left[\frac{1}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1}\right]_\delta^1 &= \frac{1}{1+\alpha} - \frac{\delta^{1+\alpha}}{1+\alpha} \\
&= \frac{1}{1+\alpha} - \frac{e^{(1+\alpha)\ln(\delta)}}{1+\alpha} \quad \xrightarrow{\delta \searrow 0} \quad \frac{1}{1+\alpha} \qquad \text{car } 1+\alpha > 0\,.
\end{aligned}$$

Pour $\alpha \leq -1$, $f$ n'est toujours pas bornée au voisinage de 0 et il faut distinguer 2 cas :

- $\alpha = -1 \quad \int_\delta^1 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln(x)\Big]_\delta^1 = \ln(1) - \ln(\delta) \quad \xrightarrow{\delta \searrow 0} \quad +\infty$
- $\alpha < -1 \quad \int_\delta^1 x^\alpha\,dx = \left[\frac{1}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1}\right]_\delta^1 = \frac{1}{1+\alpha} - \frac{\delta^{1+\alpha}}{1+\alpha}$
  $= \frac{1}{1+\alpha} - \frac{e^{(1+\alpha)\ln(\delta)}}{1+\alpha} \quad \xrightarrow{\delta \searrow 0} \quad +\infty \quad \text{car} \quad 1+\alpha < 0\,.$

De la même façon on démontre le résultat suivant.

**Théorème 9.1 (bis).** *Soit la fonction $f(x) = (x - \alpha)^\alpha$, $x \in ]a, b]$, $a < b$ avec $\alpha$ valeur réelle.*
*1°) si $-1 < \alpha$, alors $\int_a^b (x - a)^\alpha\,dx = \frac{1}{1+\alpha}\,(b - a)^{1+\alpha}$*
*2°) si $\alpha \leq -1$, alors $\int_a^b (x - a)^\alpha\,dx = +\infty$*

**Exemple 2.** Soit l'intégrale de Riemann impropre $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x}}\,dx$. Ici la fonction à intégrer est continue sur $[0, 1[$ mais non bornée au voisinage de 1. On définit, pour $0 < \delta < 1$

$$I(\delta) \stackrel{df}{=} \int_0^{1-\delta} \frac{\cos x}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

et on veut montrer que $\lim_{\delta\searrow 0} I(\delta)$ existe. Nous utilisons pour cela la formule du changement de variable sur l'intégrale $I(\delta)$. En effet, si on pose $\varphi(t) = 1 - t$, cette formule permet d'écrire

$$I(\delta) = \int_{\varphi(1)}^{\varphi(\delta)} \frac{\cos x}{\sqrt{1-x}}\, dx = \int_1^{\delta} \frac{\cos(\varphi(t))}{\sqrt{1-\varphi(t)}}\, \varphi'(t)\, dt = -\int_1^{\delta} \frac{\cos(1-t)}{\sqrt{t}}\, dt = \int_{\delta}^{1} \frac{\cos(1-t)}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Comme $\lim_{\delta\searrow 0} \cos(1-t) = \cos(1)$ on constate, en s'appuyant sur le Théorème 9.2, que les intégrales $\int_0^1 \frac{\cos(1-t)}{\sqrt{t}}\, dt$ et $\int_0^1 \frac{\cos(1)}{\sqrt{t}}\, dt$ sont de même nature. Comme $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$ est une intégrale impropre convergente (Exemple 1) il en va de même de $\int_0^1 \frac{\cos(1-t)}{\sqrt{t}}\, dt$. Ainsi $\lim_{\delta\searrow 0} I(\delta)$ existe et définit la valeur de l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{\cos(1-t)}{\sqrt{t}}\, dt$ comme celle de $\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-x}}\, dx$.

■

**Théorème 9.2.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $]a, b]$, $a < b$, et supposées non bornées au voisinage de $a$. On suppose en outre qu'elles vérifient les deux conditions suivantes :*
*1°) $f$ et $g$ sont des fonctions positives au voisinage de $a$ (c'est à dire sur $]a, a + c]$ pour $c > 0$ assez petit)*
*2°) $\lim_{x\searrow a} f(x)/g(x) = 1$ ($f$ et $g$ sont dites équivalentes au voisinage de $a$).*
*Alors les intégrales $\int_a^b f(t)\, dt$ et $\int_a^b g(t)\, dt$ sont de même nature : toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.*

**Preuve.** La démonstration de ce théorème est assez technique et peut-être sautée en première lecture. Elle utilise le ***critère de Cauchy d'existence d'une limite*** (cf Chapitre 1 Etude des fonctions §4.) dans un cas général. Pour l'intégrale de Riemann impropre $\int_a^b f(x)\, dx$ ce critère d'existence d'une limite donne lieu au ***critère de Cauchy de convergence de l'intégrale impropre*** :

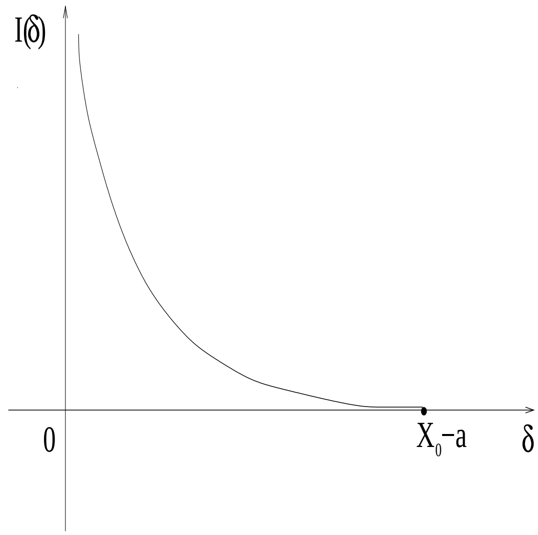
$$① \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta(\varepsilon) > 0 \quad \text{avec } a + \eta \leq b, \quad a < X \leq X' \leq a + \eta \Rightarrow \left| \int_X^{X'} f(t)\, dt \right| \leq \varepsilon$$

L'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\, dx$ converge donc si et seulement si la propriété ① est vérifiée. Traduisons l'hypothèse d'équivalence au voisinage de $a$ pour $f$ et $g$ :

$$\forall \varepsilon \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad \exists X_0(\varepsilon) \in ]a, a + c], \quad a < x \leq X_0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1 + \varepsilon$$

⋆ Si $\int_a^b f(x)\, dx$ est convergente, il en va de même de $\int_a^{X_0} f(x)\, dx$. Comme on a les inégalités $0 \leq (1-\varepsilon)g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in ]a, X_0]$, l'intégrale $\int_a^{X_0} (1-\varepsilon)g(x)\, dx$ est aussi convergente par application du critère de Cauchy ① (la positivité de $f$ et $g$ sur $]a, a + c]$ joue un rôle important ici comme plus loin). Par linéarité, l'intégrale $\int_a^{X_0} g(x)\, dx$ est aussi convergente comme l'intégrale $\int_a^b g(x)\, dx$ .

⋆ Si $\int_a^b f(x)\, dx$ est divergente, il en va de même de $\int_a^{X_0} f(x)\, dx$. Nous allons cette fois utiliser l'inégalité $f(x) \leq (1+\varepsilon)g(x) \quad \forall x \in ]a, X_0]$ pour montrer aussi la divergence de $\int_a^b g(x)\,dx$. Comme la fonction $I(\delta) = \int_{a+\delta}^{X_0} f(x)\,dx \quad 0 < \delta \leq X_0 - a$ est une fonction positive et décroissante et comme $\lim_{\delta \searrow 0} I(\delta)$ n'existe pas par hypothèse alors $\lim_{\delta \searrow 0} I(\delta) = +\infty$. Il en va de même, à cause de l'inégalité précédente, de $I^\star(\delta) \stackrel{df}{=} \int_{a+\delta}^{X_0} (1+\varepsilon)g(x)\,dx$ : $\lim_{\delta \searrow 0} I^\star(\delta) = +\infty$. Ainsi l'intégrale $\int_a^{X_0} (1+\varepsilon)g(x)\,dx$ est divergente comme l'intégrale $\int_a^{X_0} g(x)\,dx$ par linéarité. On en conclut donc que l'intégrale $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge elle aussi.

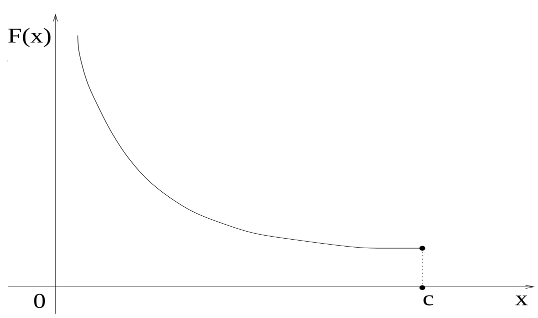



$\lim_{\delta \searrow 0} I(\delta) = +\infty$

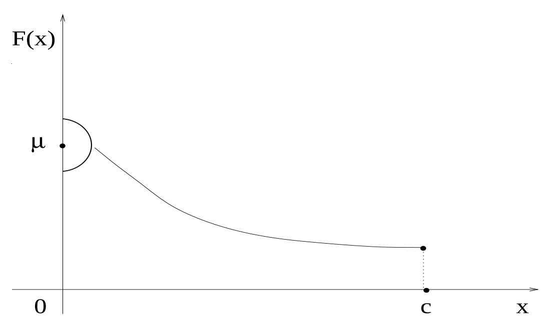
Pour affirmer que $\lim_{\delta \searrow 0} I(\delta) = +\infty$ nous nous appuyons sur le lemme suivant donné sans démonstration.

**Lemme** *Pour une fonction* $F : x \in ]0, c] \to F(x) \in \mathbb{R}$, $c > 0$, *décroissante* ($x \leq y \Rightarrow F(x) \geq F(y)$) *de deux choses l'une*

- *ou bien* $E \stackrel{df}{=} F(]0, c])$ *est majoré, alors* $\lim_{x \searrow 0} F(x) = \sup E$
- *ou bien* $E$ *est non majoré, alors* $\lim_{x \searrow 0} F(x) = +\infty$




*E non majoré :* $\lim_{x \searrow 0} F(x) = +\infty$




*E majoré :* $\lim_{x \searrow 0} F(x) = \sup E = \mu$

**Remarque :** On a le même résultat pour des fonctions $f$ et $g$ continues sur $[a,b[$, non bornées, de même signe et équivalentes au voisinage de $b$ : les intégrales impropres $\int_a^b f(x)\,dx$ et $\int_a^b g(x)\,dx$ sont de même nature.

**Exemple 2 bis.** Pour une fonction $f$ continue sur $[a,b[$ et non bornée au voisinage de $b$, le critère de Cauchy de convergence de l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\,dx$ s'écrit :

$$\text{(1bis)}\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta(\varepsilon) > 0 \quad \text{avec } a \leq b-\eta(\varepsilon), \quad b-\eta \leq X \leq X' < b \Rightarrow \left| \int_X^{X'} f(t)dt \right| \leq \varepsilon$$

Nous allons vérifier ce critère (1bis) pour l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x}}\,dx$ de l'Exemple 2. Comme la difficulté réside en 1, on considère pour $0 < X < X' < 1$ l'intégrale $\left|\int_X^{X'} \frac{\cos x}{\sqrt{1-x}}\,dx\right|$ qu'il s'agit de rendre inférieure à $\varepsilon > 0$ pour $X$ assez grand. On a en effet :

$$\left| \int_X^{X'} \frac{\cos x}{\sqrt{1-x}} dx \right| \leq \int_X^{X'} \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \Big[ -2\sqrt{1-x} \Big]_X^{X'} = -2\sqrt{1-X'} + 2\sqrt{1-X} \leq 2\sqrt{1-X}$$

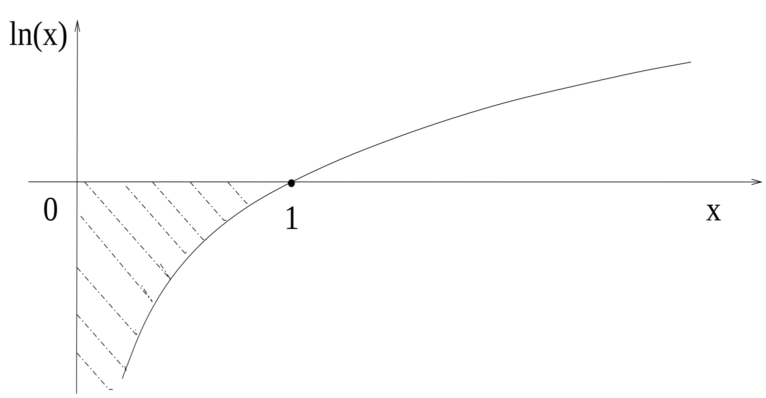
ceci en utilisant la propriété de majoration de l'intégrale et le Théorème fondamental 1. Comme $\lim_{X \nearrow 1} \sqrt{1-X} = 0$ (par continuité de la fonction $\sqrt{x}$ en 0) la valeur $2\sqrt{1-X}$ peut être rendue inférieure à $\varepsilon$ pour $X \in [1-\eta(\varepsilon), 1[$ avec $\eta(\varepsilon)$ assez petit, c'est à dire pour $X$ assez près de 1.

■

**Exemple 3.** On considère $\int_0^1 \ln(x)\,dx$ l'intégrale impropre de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $]0,1]$ et nous montrons qu'elle est convergente. En effet pour $0 < \delta < 1$ on a, en utilisant la formule d'intégration par parties :

$$I(\delta) = \int_\delta^1 \ln(x)\,dx = \Big[ x \ln(x) \Big]_\delta^1 - \int_\delta^1 x \,\frac{1}{x}\,dx = -\delta \ln(\delta) - (1-\delta)$$

Comme $\lim_{\delta \searrow 0} \delta \ln(\delta) = 0$ on en déduit que $\lim_{\delta \searrow 0} I(\delta) = -1$.




*L'aire de la partie hachurée vaut -1.*

■

On suit la même démarche pour définir l'intégrale de Riemann impropre sur des intervalles semi-bornés.

**Définition .** Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle fermé et semi-borné $[a, +\infty)$. Soit $I(\delta) = \int_a^\delta f(x)\,dx$ avec $a \le \delta$. Si $\lim_{\delta\to+\infty} I(\delta)$ existe et est finie, cette limite définit l'intégrale de $f$ sur $[a, +\infty)$ :

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \overset{df}{=} \lim_{\delta\to+\infty} \int_a^\delta f(x)\,dx$$

et elle est appelée ***intégrale de Riemann impropre*** (ou ***généralisée***) de $f$ sur $[a, +\infty)$. On dit aussi que l'intégrale de Riemann impropre est convergente ; dans le cas contraire elle est dite divergente.

**Remarques :** Une définition semblable a lieu pour une fonction $f$ continue sur l'intervalle fermé et semi-borné $(-\infty, b]$ afin de définir l'intégrale impropre de $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ :

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx \overset{df}{=} \lim_{\delta\to-\infty} \int_\delta^b f(x)\,dx\,.$$

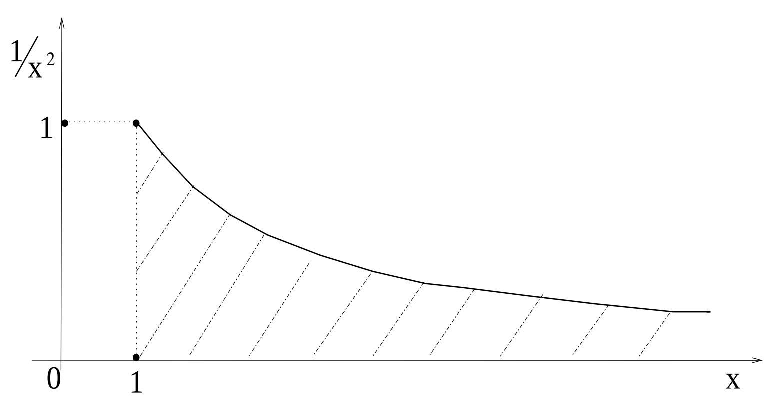
Pour une fonction continue sur $\mathbb{R}$, on dira que l'intégrale de Riemann impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ existe si, pour $c \in \mathbb{R}$, les intégrales impropres $\int_{-\infty}^c f(x)\,dx$ et $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ sont convergentes. Dans ce cas on pose

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \overset{df}{=} \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$

cette définition étant indépendante du nombre $c$ choisi.

**Exemple 4.** Soit la fonction $f(x) = 1/x^2$, $x \in [1, +\infty)$. On a pour $\delta \ge 1$ $\int_1^\delta \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\delta = -\frac{1}{\delta} + 1$ par le Théorème fondamental 1. D'où, par définition de l'intégrale impropre :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\delta\to+\infty} \int_1^\delta \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\delta\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) = 1$$




*L'aire de la partie hachurée vaut 1.*

Cet exemple fait partie de la classe de fonctions dont on discute dans le résultat suivant.
■

**Théorème 9.3.** *Soit la fonction $f(x) = 1/x^\alpha$, $x \in [1, +\infty)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.*
*1°) pour $1 < \alpha$, l'intégrale de Riemann impropre de $f$ existe et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha-1}$*
*2°) pour $\alpha \leq 1$, l'intégrale de Riemann impropre de $f$ est divergente : $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx = +\infty$*

**Preuve.**
Pour $1 < \alpha$ on a $\int_1^\delta \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \left[\frac{1}{1-\alpha}\, x^{-\alpha+1}\right]_1^\delta = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{\delta^{\alpha-1}}\right)$ et $\lim_{\delta\to+\infty} \int_1^\delta \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha-1}$.
Pour $\alpha = 1$ on a $\int_1^\delta \frac{1}{x}\, dx = [\ln(x)]_1^\delta = \ln(\delta) \quad \overset{\delta\to+\infty}{\longrightarrow} \quad +\infty$.
Pour $\alpha < 1$ on a $\int_1^\delta \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{-\alpha+1}\right]_1^\delta = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \delta^{1-\alpha}\right) \quad \overset{\delta\to+\infty}{\longrightarrow} \quad +\infty$.
Dans ce qui précède nous avons fait référence au Théorème fondamental 1 en utilisant le fait qu'une primitive de $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ pour $\alpha \neq 1$, est $F(x) = \frac{1}{1-\alpha}\, x^{-\alpha+1}$. De plus nous avons utilisé la propriété suivante :

$$\lim_{\delta\to+\infty} \delta^\beta = \lim_{\delta\to+\infty} e^{\beta\ln(\delta)} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \beta < 0 \\ 1 & \text{si} \quad \beta = 0 \\ +\infty & \text{si} \quad \beta > 0 \end{cases}$$

Dans l'Exemple 4, comme dans le Théorème 9.3,nous avons pu montrer la convergence des intégrales de Riemann impropres par calcul explicite de la limite. Ce ne sera pas toujours possible et dans certains cas il faudra recourir au ***critère de Cauchy de convergence d'une intégrale impropre*** sur un intervalle semi-borné. Pour $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ ce critère s'écrit :

$$② \quad \forall\varepsilon > 0, \quad \exists X_0(\varepsilon) \geq a, \quad X_2 \geq X_1 \geq X_0 \quad \Longrightarrow \quad \left|\int_{X_1}^{X_2} f(x)\, dx\right| \leq \varepsilon\,.$$

Ainsi l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge si et seulement si la propriété ② est satisfaite. Ce critère ② est la transcription du critère de Cauchy d'existence d'une limite (cf supra). Nous allons l'utiliser pour montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ est convergente.

**Exemple 5.** Considérons l'intégrale de Riemann impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$. En utilisant la formule d'intégration par parties on a :

$$\int_1^b \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_1^b + \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2}\, dx = cos(1) - \frac{\cos(b)}{b} + \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2}\, dx\,.$$

On en tire, pour $X_2 \geq X_1 \geq X_0 \geq 1$, l'égalité

$$\int_{X_1}^{X_2} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \int_1^{X_2} \frac{\sin(x)}{x}\, dx - \int_1^{X_1} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = -\frac{\cos(X_2)}{X_2} + \frac{\cos(X_1)}{X_1} + \int_{X_1}^{X_2} \frac{\cos(x)}{x^2}\, dx$$

et la majoration :

$$\begin{aligned}\left|\int_{X_1}^{X_2} \frac{\sin(x)}{x}\,dx\right| \le \frac{1}{X_2}+\frac{1}{X_1}+\int_{X_1}^{X_2}\frac{1}{x^2}\,dx &= \frac{1}{X_2}+\frac{1}{X_1}+\left[-\frac{1}{x}\right]_{X_1}^{X_2} \\ &= \frac{1}{X_2}+\frac{1}{X_1}-\frac{1}{X_2}+\frac{1}{X_1}=\frac{2}{X_1}\le\frac{2}{X_0}\,.\end{aligned}$$

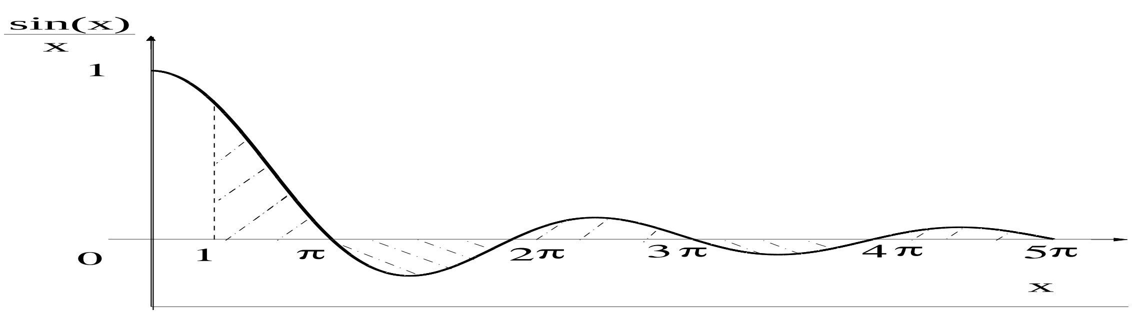
Comme $\lim_{X_0\to+\infty}\frac{2}{X_0}=0$, pour $X_0$ assez grand, et quelles que soient les valeurs de $X_1$ et $X_2$ telles que $X_2 \ge X_1 \ge X_0$, on peut rendre $|\int_{X_1}^{X_2} f(x)\,dx|$ aussi petit qu'on veut. Le critère ② est donc vérifié ce qui nous garantit la convergence de l'intégrale impropre sans que l'on ait une idée *a priori* de la valeur de cette intégrale. Par ailleurs on peut montrer que cette intégrale impropre n'est pas absolument convergente c'est à dire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} |\frac{\sin(x)}{x}|\,dx$ n'est pas convergente. En effet sur chaque intervalle $[n\pi,(n+1)\pi]$, $n\in\mathbb{N}^\star$, on a l'inégalité $|\frac{\sin(x)}{x}| \ge \frac{|\sin(x)|}{(n+1)\pi}$ d'où

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\,dx \ge \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin(x)|\,dx=\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\,dt=\frac{2}{(n+1)\pi}$$

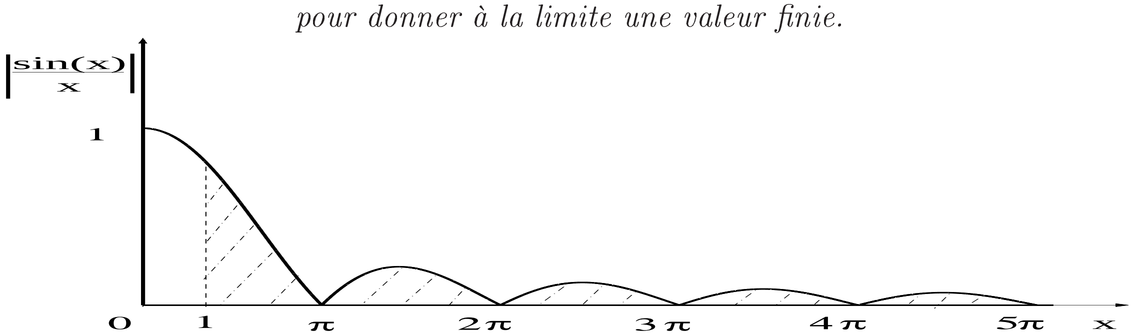
grâce au changement de variable $\varphi(t)=t+n\pi$, $t\in[0,\pi]$. L'inégalité précédente entraîne

$$\int_{\pi}^{n\pi}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\,dx=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\,dx \ge \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\,.$$

La série $\sum_{k\ge1}\frac{1}{k}$ étant divergente (cf Chapitre 3) on en déduit que la suite $\int_1^{n\pi}|\frac{\sin(x)}{x}|\,dx = \int_1^{\pi}|\frac{\sin(x)}{x}|\,dx+\int_{\pi}^{n\pi}|\frac{\sin(x)}{x}|\,dx$ tend vers $+\infty$ quand $n\to+\infty$. L'ensemble de réels $\{\int_1^X |\frac{\sin(x)}{x}|\,dx\,;\quad X\ge1\}$ n'est donc pas borné et comme $X\to\int_1^X|\frac{\sin(x)}{x}|\,dx$ est une fonction croissante il s'en suit que $\lim_{x\to+\infty}\int_1^X|\frac{\sin(x)}{x}|\,dx=+\infty$ (cf Lemme Théorème 9.4).




*Les aires hachurées positives et négatives se compensent en partie pour donner à la limite une valeur finie.*




*Les aires hachurées sont toutes positives et leur somme a une valeur infinie.*

**Remarque :** on montre par d'autres voies que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$

■

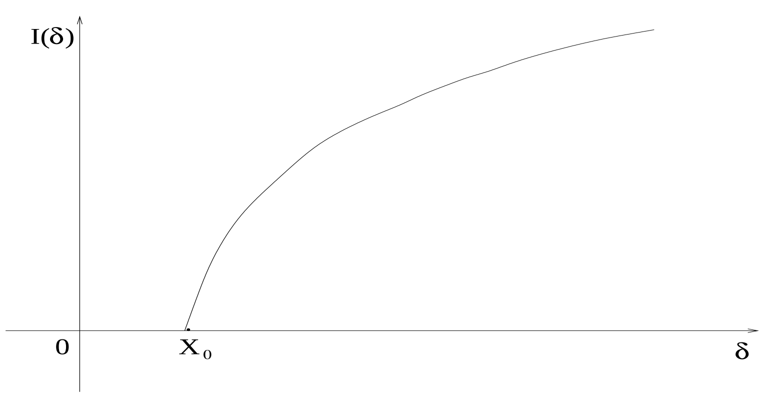
Le Théorème qui suit est l'équivalent du Théorème 9.2 pour le cas qui nous occupe présentement.

**Théorème 9.4.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies et continues sur $[a, +\infty)$, positives ou nulles au voisinage de l'infini ($\exists \quad c > a$ tel que $f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [c, +\infty)$) et vérifiant la propriété $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ ($f$ et $g$ sont dites équivalentes à l'infini). Alors les intégrales $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ sont de même nature : toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.*

**Preuve.** Les hypothèses font que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $X_0(\varepsilon)$ (qu'on peut prendre $\geq c$) tel que $x \geq X_0 \Longrightarrow |f(x)/g(x) - 1| \leq \varepsilon$ ou encore $x \geq X_0 \Longrightarrow 1 - \varepsilon \leq f(x)/g(x) \leq 1 + \varepsilon$.

⋆ si $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ est convergente, il en va de même de $\int_{X_0}^{+\infty} f(x)\, dx$. Comme on a les inégalités $0 \leq (1-\varepsilon)\, g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [X_0, +\infty)$, l'intégrale $\int_{X_0}^{+\infty} (1-\varepsilon)\, g(x)\, dx$ est aussi convergente par application du critère de Cauchy 2. Par linéarité l'intégrale $\int_{X_0}^{+\infty} g(x)\, dx$ est aussi convergente comme $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$.

⋆ si $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ est divergente il en va de même de $\int_{X_0}^{+\infty} f(x)\, dx$ et nous allons montrer la divergence de $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ en utilisant l'inégalité $f(x) \leq (1+\varepsilon) g(x) \quad \forall x \geq X_0$. Comme la fonction $I(\delta) = \int_{X_0}^{\delta} f(x)\, dx$, $X_0 \leq \delta$, est une fonction positive et croissante et comme $\lim_{\delta\to+\infty} I(\delta)$ n'existe pas par hypothèse, alors $\lim_{\delta\to+\infty} I(\delta) = +\infty$. Il en va de même, à cause de l'inégalité précédente, de $I^\star(\delta) = \int_{X_0}^{\delta} (1+\varepsilon) g(x)\, dx$ : $\lim_{\delta\to+\infty} I^\star(\delta) = +\infty$. Ainsi l'intégrale $\int_{X_0}^{+\infty} (1+\varepsilon) g(x)\, dx$ est divergente comme l'intégrale $\int_{X_0}^{+\infty} g(x)\, dx$ par linéarité. On en conclut donc que l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ diverge elle aussi.

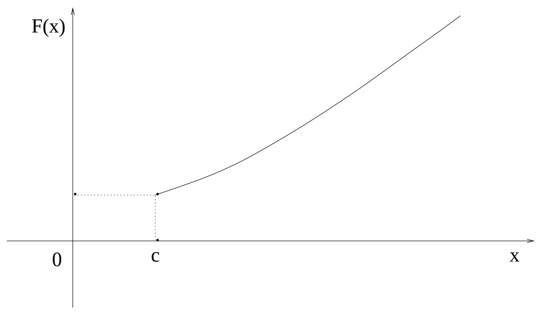



$$\lim_{\delta\to+\infty} I(\delta) = +\infty$$

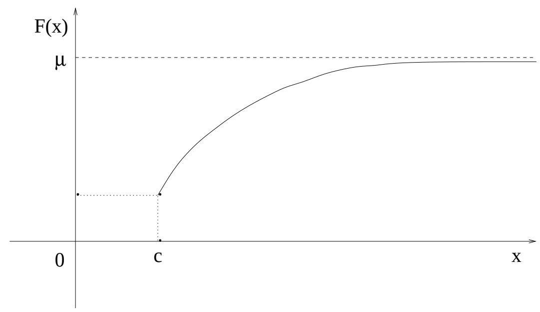
Pour affirmer que $\lim_{\delta\to+\infty} I(\delta) = +\infty$ nous nous appuyons sur le lemme suivant donné sans démonstration

**Lemme** *Pour une fonction $F : x \in [c, +\infty) \to F(x) \in \mathbb{R}$, croissante ($x \leq y \Longrightarrow F(x) \leq F(y)$), de deux choses l'une*

- *ou bien $F([c, +\infty)) \stackrel{df}{=} E$ est majoré, alors $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \sup\{E\}$*
- *ou bien $E$ est non majoré, alors $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$*

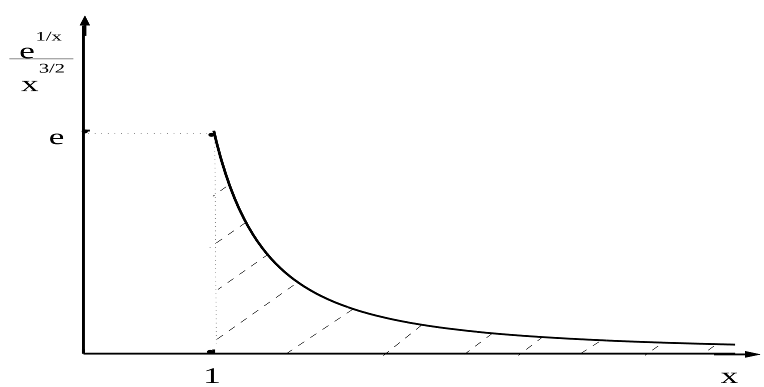



*E non majoré :* $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$




*E majoré :* $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \sup\{E\} = \mu$

**Exemple 6.** Soit l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^\alpha}\,dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Les fonctions $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ et $g(x) = \frac{e^{1/x}}{x^\alpha}$ sont positives ou nulles sur $[1, +\infty)$ et équivalentes à l'infini : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{1/x}} = 1$. Par application des Théorèmes 9.3 et 9.4, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^\alpha}\,dx$ est convergente pour $\alpha > 1$ et divergente pour $\alpha \leq 1$.




*L'aire hachurée a une valeur finie.*

■

**Attention !.** Le fait que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ n'implique pas que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ soit convergente (exemple : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\delta\to+\infty} [\ln(x)]_1^\delta = +\infty$ ). Le fait que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ soit convergente n'implique pas que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, ni que cette limite existe, ni même que la fonction $f$ soit bornée au voisinage de l'infini. Par exemple on peut montrer que $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$, avec $f(x) = \frac{x}{1+x^7 \sin^2(x)}$, est convergente alors que $f$ est non bornée au voisinage de l'infini puisque $f(n\pi) = n\pi$. Pour illustrer ces questions délicates nous développons dans l'exemple suivant le cas d'une intégrale convergente, avec non existence de la limite à l'infini pour la fonction qu'on intègre.

**Exemple 7.** Il concerne la convergence des ***intégrales de Fresnel*** $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$ et $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ (toutes deux égales à $\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$). Prenons par exemple la première. On pose $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \int_0^1 \cos(x^2)\,dx + \int_1^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$ et on s'intéresse à $\int_1^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$. Soit le changement de variable $\varphi(t) = \sqrt{t}$ ; en l'utilisant dans l'intégrale $\int_{X_1}^{X_2} \cos(x^2)\,dx$, avec $1 \leq X_1 \leq X_2$, il vient

$$\int_{X_1=\varphi({X_1}^2)}^{X_2=\varphi({X_2}^2)} \cos(x^2)\,dx \;=\; \int_{{X_1}^2}^{{X_2}^2} \cos(\varphi(t)^2)\,\varphi'(t)\,dt = \int_{{X_1}^2}^{{X_2}^2} \cos(t)\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$$

puis en intégrant par parties on a les autres égalités

$$= \left[\sin(t)\,\frac{1}{2\sqrt{t}}\right]_{{X_1}^2}^{{X_2}^2} - \int_{{X_1}^2}^{{X_2}^2} \sin(t)\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})t^{-3/2}\,dt$$

$$= \frac{\sin({X_2}^2)}{2X_2} - \frac{\sin({X_1}^2)}{2X_1} + \frac{1}{4}\int_{{X_1}^2}^{{X_2}^2} \frac{\sin(t)}{t^{3/2}}\,dt\,.$$

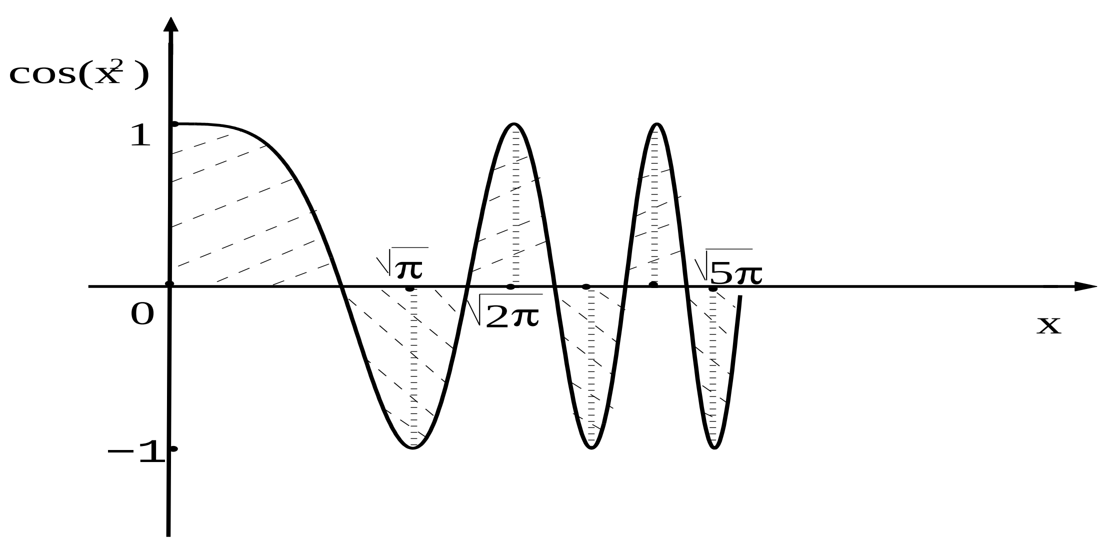
On a donc, par majoration :

$$\left|\int_{X_1}^{X_2} \cos(x^2)\,dx\right| \leq \frac{1}{2X_1} + \frac{1}{2X_2} + \frac{1}{4}\int_{{X_1}^2}^{{X_2}^2} \frac{dt}{t^{3/2}}\,.$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ est une intégrale convergente (cf Théorème 9.3) elle vérifie le critère de Cauchy 2 : pour $\varepsilon > 0$, $\exists V_0(\varepsilon) > 1$, $V_2 \geq V_1 \geq V_0 \Longrightarrow \int_{V_1}^{V_2} \frac{dt}{t^{3/2}} \leq \varepsilon$. Par ailleurs $\exists U_0 \geq 1$ pour lequel $X_1 \geq U_0$ entraîne $\frac{1}{X_1} \leq \frac{3}{4}\varepsilon$. Donc pour $X_2 > X_1 \geq \max(U_0, \sqrt{V_0})$ on a l'inégalité

$$\left|\int_{X_1}^{X_2} \cos(x^2)\,dx\right| \leq \frac{3}{8}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon = \varepsilon\,.$$

Par le critère de Cauchy 2 l'intégrale $\int_1^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$ est donc convergente tout comme l'intégrale de Fresnel $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$. Or la fonction $\cos(x^2)$ n'a pas de limite à l'infini (elle oscille d'autant plus vite entre les valeurs -1 et +1 que $x$ a des valeurs élevées) alors que son intégrale sur $[0, +\infty)$ converge comme on vient de le voir.




*Les aires positives et négatives se compensent en partie pour donner à la limite la valeur finie $\sqrt{2\pi}/4$.*

On peut calculer la valeur de ces intégrales de Fresnel en intégrant - par la méthode des résidus - la fonction de la variable complexe $e^{-z^2}$ sur un contour particulier ; mais ceci est hors sujet. On peut aussi chercher une valeur approchée de ces intégrales en évaluant numériquement $\int_0^X \cos(x^2)\,dx$ ou $\int_0^X \sin(x^2)\,dx$ - pour une valeur $X$ assez grande - par des méthodes de quadrature numérique assez sophistiquées. Par exemple l'approximation de $\int_0^{\sqrt{800\pi}} \cos(x^2)\,dx$ par la méthode de quadrature adaptative de Gauss-Kronrod, pour une précision assez grande, donne la valeur 0.626655... alors que la valeur exacte de l'intégrale sur $[0, +\infty)$ est $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = 0.62665706865775...$

■